REMERCIEMENTS

Cette thèse a été réalisée au sein du groupe de la théorie des opérateurs et de la théorie des fonctions à la faculté des sciences de Rabat sous la direction du Pr. El Hassan ZEROUALI.

Toute ma gratitude va à Monsieur El Hassan ZEROUALI d'avoir accepté à diriger cette thèse. Ses qualités scientifiques, ses conseils incessants m'ont été d'une aide précieuse pour mener à terme ce travail.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur Omar EL-FALLAH pour l'aide qu'il m'a apportée sur le plan moral et sur le plan travail. Ses qualités humaines et sa rigueur scientifique m'ont aidée à mener à bien ce travail. C'est un honneur pour moi qu'il préside le jury.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Abdelhak ZOGLAT pour l'honneur et l'amabilité qu'il me fait en en étant membre du jury.

Mes vifs remerciements à Monsieur Azz eddine DAOUI pour avoir accepté d'examiner ma thèse et de siéger dans mon jury.

Je remercie vivement Madame Rajae BEN TAHER Professeur à la faculté de Meknès qui a accepté la lourde tâche de faire un rapport sur ce travail. je la remercie infiniment.

Je remercie sincèrement Monsieur Karim KELLAY Professeur à l'université de Bordeaux 1 d'avoir accepté d'effectuer un rapport sur cette thèse, pour sa disponibilité et ses précieux conseils et pour l'honneur qu'il me fait en en étant membre du jury.

Je suis très reconnaissante envers Monsieur Mustapha RACHIDI, pour sa patience, la justesse de ses appréciations, ses qualités humaines, sa disponibilité. Je le remercie vivement.

Je ne laisse pas cette occasion passer sans remercier les membres du laboratoire Analyse et Applications.

Je remercie chaleureusement les membres du département de mathématiques pour leur soutien moral et leurs qualités humaines.

Tous mes vifs remerciement vont à Madame Rabia ZOUITI.

Enfin, je souhaite remercier les membres de ma famille et mes proches ; je leur suis reconnaissante pour leur soutien constant pendant ces années de travail, leur encouragement et leur affection ont été déterminants tout au long de la poursuite de la thèse.

RÉSUMÉ

La thèse est axée sur trois thèmes, en relation avec la théorie des opérateurs. La première partie est consacrée aux suites de Fibonacci et chaines de Markov. On donne de nouveaux résultats sur la convergence des suites récurrentes. De plus, on explicite la fonction génératrice de la variable aléatoire, définissant le temps d'absorption du processus aléatoire, ayant un nombre fini d'états transitoires, par une classe d'états récurrents . La deuxième partie est sur les opérateurs analytiques. En utilisant la notion de point d'évaluation analytique d'un opérateur cyclique, nous définissons les opérateurs analytiques comme étant des opérateurs dont le spectre de l'adjoint contient les points d'évaluation analytiques et dont l'ensemble des vecteurs propres associés est dense. Nous donnons une description détaillée de l'image spectrale, retrouvant ainsi la plupart des résultats des opérateurs sous normaux. La troisième partie de ce travail, on s'intéresse au thème des opérateurs de composition sur des espaces de fonctions analytiques. L'étude de l'appartenance des opérateurs de composition aux p-classes de Schatten dans les espaces de Hardy et Dirichlet a été traité par un bon nombre de mathématiciens. A la suite, ils ont pu donner certaines caractérisations. Notons que les points de contact du symbole avec le bord du disque joue un rôle essentiel d'où l'utilité d'introduire l'ensemble niveau et d'établir le lien entre l'appartenance aux p-classes de Schatten dans l'espace de Dirichlet à poids et la capacité de l'ensemble des points de contact. Nous donnons une condition complète d'appartenance aux p-classe de Schatten dans l'espace de Hardy lorsque le symbole est une fonction extérieure admettant un seul point de contact .

Mots-clefs : Suite de Fibonacci généralisée, chaine de Markov, cyclique, point d'évaluation, Espace de Hardy, Espace de Dirichlet, point de contact .

ABSTRACT

The thesis focuses on three themes related to operator theory. The first part is devoted to Fibonacci series and Markov chains. We give new results on the convergence of recurrent sequences. Moreover, we compute the generating function of the random variable defining the time of absorption of a stochastic process, of finite set of transient states, by a classes of recurrent states. The second part is analytic operators. Using the concept of analytic bounded point evaluations of a cyclic operator, we define analytic operators as operators whose spectrum contains bounded analytical evaluations points and whose set of eigenvectors associated to the adjoint are dense. We give a detailed description of the spectral image, retreiving most results subnormal operators. In the third part of this work, we focus on the topic of composition operators on spaces of analytic functions. The study of composition operators belonging to p-Schatten classes in Hardy spaces and Dirichlet was treated by many mathematicians. As a result, they were able to give some characterizations. Note that the contact points of the symbol with the edge of the disk plays a crucial role hence the need to introduce all levels and to establish the link between membership in the p-Schatten classes in space Dirichlet weight and the capacity of all contact points. We provide a full condition belonging to the class of p-Schatten in Hardy space when the symbol is an external function admitting a single point of contact.

Key Words : Generalized Fibonacci sequences, Markov chain, cyclic, point evaluations, Hardy space, Dirichlet space, contact points.

Table des matières

Introduction 2

I Suites de Fibonnacci et chaines de Markov 10

1 Suites de Fibonacci généralisées et chaînes de Markov 11

1.1 Introduction. 11

1.2 r-SFG et chaînes de Markov : Première Formulation 12

1.2.1 Préliminaire 12

1.2.2 r-SFG à coefficients non négatifs de somme 1 et chaînes de Markov 12

1.2.3 r-SFG à coefficients non négatifs quelconques et chaînes de Markov 14

1.3 r-SFG et chaînes de Markov : seconde Formulation 15

1.3.1 Formulation stochastique des suites (1.1) 15

1.3.2 Expression combinatoire de $\rho(n, m)$ 17

1.3.3 Calcul de la probabilité d'absorption 17

1.4 Suites (1.1), chaînes de Markov et Théorème de Cayley-Hamilton 19

1.4.1 Une formulation matricielle des suites (1.1) 19

1.4.2 Application aux chaînes de Markov. 20

2 On the Fibonacci Markov chains 22

2.1 Introduction. 22

2.2 Fibonacci Markov chains and Césaro mean convergence 24

2.3 Fibonacci Markov chains and convergence 26

2.4 Sequence 2.1 and random variable of absorption 28

II Opérateurs Analytiques. 31

1 Préliminaires. 32

1.1 Les opérateurs Shift à poids 34

1.1.1 Spectre du shift à poids 34

1.1.2 Les points d'évaluation bornés pour un opérateur cyclique 35

1.1.3 Les points d'évaluations bornés pour un opérateur multicyclique 36

2 Étude des Opérateurs Analytiques **41**

2.1 **Cas Cyclique** 41

2.1.1 **Le commutant d'un opérateur analytique.** 41

2.1.2 **Image spectrale** 46

2.1.3 **Cyclicité forte** 48

2.1.4 **Sous espaces invariants** 52

2.2 **Cas Multicyclique** 56

III Opérateurs de Composition. 60

1 Préliminaires **61**

1.1 **Mesures et dimensions de Hausdorff.** 61

1.2 **Capacités.** 63

1.3 **Espaces de fonctions analytiques.** 66

1.4 **Opérateurs sur les espaces de fonctions analytiques.** 74

1.4.1 **Opérateurs dans les classes de Schatten.** 75

1.4.2 **Mesure α -Carleson.** 78

2 Étude des opérateurs de composition **80**

2.1 **Continuité de l'opérateur de composition.** 80

2.2 **Opérateurs de composition compacts.** 84

2.3 **Opérateurs de composition dans les classes de Schatten.** 87

2.3.1 **Opérateurs à trace.** 87

3 Points de contact et les Opérateurs de Composition dans les classes de Schatten **93**

3.1 Introduction 93

3.2 Luecking characterization for Schatten class of Toeplitz operators 94

3.2.1 Toeplitz operators on the Bergman spaces 94

3.2.2 Composition operators 97

3.3 Membership to $\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$ 99

3.3.1 Membership to $\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$ through level sets 99

3.3.2 Contact set reduced to one point 101

3.4 Schatten class $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$ and level sets 106

3.4.1 Proof of Theorem 108

Introduction Générale

Cette thèse se compose de trois parties indépendantes bien qu'appartenant chacune à des branches de l'**Analyse Fonctionnelle**. La première partie concerne les **suites de Fibonacci** et les **Chaines de Markov**. Les deux dernières développent des outils très divers d'analyse harmonique, de théorie des fonctions et de théorie des opérateurs.

Partie I : Suites de Fibonacci et Chaines de Markov.

Généralités sur les suites récurrentes linéaires

La théorie générale des équations aux différences a acquis, ces dernières décennies, une nouvelle dimension dans les sciences fondamentales et appliquées telles que : les mathématiques (pure et appliquée), l'informatique, la physique (théorique et appliquée), la biologie (en génétique), l'économie (en finances) et beaucoup d'autres disciplines.

En effet, l'aspect discret de ces équations est souvent utilisé pour étudier des modèles associés à divers problèmes relevant de l'analyse appliquée ou des sciences de l'ingénieur. Ce procédé de discrétisation fournit des approches fondamentales dans l'approximation et la description des résultats dans des domaines théoriques ou pratiques. Les travaux sur ces sujets ont été à la base du développement de plusieurs méthodes numériques pratiques.

Les équations aux différences linéaires définies par un procédé de récurrence, fournissent des suites récurrentes, qui constituent une classe importante largement étudiée dans la littérature. De telles suites sont construites à partir de la donnée de deux suites finies $a_0, \cdots, a_{r-1}$ et $V_0, \cdots, V_{r-1}$ de nombres réelles ou complexes. Pour $n \geq r-1$, le terme V_{n+1} est déduite par le biais du procédé de récurrence linéaire d'ordre r suivante,

$$V_{n+1} = a_0 V_n + a_1 V_{n-1} + \cdots + a_{r-1} V_{n-r+1}.$$

Les nombres $V_0, \cdots, V_{r-1}$ représentent *les conditions initiales* et les $a_0, \cdots, a_{r-1}$ ($r \geq 2$, $a_{r-1} \neq 0$) sont des appelés *coefficients*, de la suite $\{V_n\}_{n\geq 0}$, ainsi construite.

La famille des suites $\{V_n\}_{n\geq 0}$ est utilisée dans différents domaines de sciences exactes, en particulier dans plusieurs théories mathématiques pures ou appliquées. Pour illustrer avec précision nos propos, voici quelques uns des domaines d'application de ces suites en mathématiques et dans les sciences exactes :

- Le problème des moments et la théorie des opérateurs sous normaux (voir [7])
- Théorie des nombres, combinatoire et théorie des graphes (voir [19] par exemple).
- Probabilité, statistique et processus stochastiques (voir [23, 24, 25, 28] par exemple).
- Informatique, compression d'images et éléctronique(voir [18] par exemple).
- Physique générale et théorique (voir [2, 20, 29] par exemple).
- Analyse numérique et procédés d'approximations des solutions des équations (voir [11] par exemple).

A titre d'exemple, considérons la suites des nombres de Fibonacci classiques $\{F_n\}_{n\geq 0}$ définies par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

Les réels F_n $(n \geq 0)$ sont appelés aussi *nombres de Fibonacci.* Cette suite a été introduite pour la première fois par Léonard de Pise, dit Fibonacci, est réstée longtemps dans l'ombre, sans qu'on lui accorde une grande importance. Par la suite, il s'est avéré que les nombres de Fibonacci commencent à avoir une grande d'importance dans de nombreux domaines des sciences appliquées. En effet, depuis quelques décennies cette suite intervient en théorie des nombres, en informatique et dans la programmation mathématique. Ils constituent un outil important dans l'optimisation des subdivisions successives d'un intervalle (voir [21] par exemple), ainsi qu'en physique des fractales et des milieux désordonnés (voir [2] par exemple).

Cette partie de thèse concerne, une étude des suites récurrentes linéaires appelées aussi *suites de Fibonacci généralisés*, en relation avec les chaines de Markov et les processus stochastiques. Notre contribution porte sur l'étude des chaines de Markov de type de Fibonacci. Il s'agit d'approfondir certains aspects des résultats de [23, 24, 25].

Dans le Chapitre 1 on va introduire les outils nécessaires à notre contribution. Plus précisément, le but est de nous permettre à mieux cerner la porté des résultats du Chapitre 2. Il s'agit de présenter les liens entre les suites de Fibonacci généralisées, les chaînes de Markov et les processus stochastiques associés, à travers deux principales formulations matricielles des suites de Fibonacci généralisées. On va alors exposer les résultats importants, en se basant essentiellement ici sur les travaux de Mouline-Rachidi [23, 24, 25].

Le Chapitre 2 est consacré à notre contribution qui porte sur les chaines de Markov de type de Fibonacci. Les résultats de ce travail ont été publiés dans [3]. Dans cette recherche nous nous sommes intéressés aux chaînes de Markov associées aux suites de Fibonacci à coefficients réels non négatifs. La première formulation matricielle stochastique (introduite au Chapitre 1) de ces suites nous a amené à considérer la théorie des chaines de Markov discrètes. Ainsi, nous avons obtenu de nouveaux résultats sur la convergence des suites récurrentes linéaires. De plus, on a donné l'expression explicite de la fonction génératrice de la variable aléatoire, définissant le temps d'absorption du processus aléatoire, ayant un nombre fini d'états transitoires, par une classe d'états récurrents.

Partie II : Opérateurs Analytiques

Les opérateurs analytiques sont définis comme des opérateurs bornés dont les adjoints ont un ensemble riche de vecteurs propres. Nous décrivons le commutant des opérateurs analytiques et dérivons quelques propriétés spectrales de tels opérateurs. Nous étudions également les propriétés spectrales de leurs restrictions aux sous espaces invariants.

Le concept des points d'évaluations pour un espace de Banach de fonctions est défini naturellement, de la manière suivante. Soit X un espace de fonctions définies sur une certaine région Ω, un nombre complexe $\lambda \in \Omega$ est dit point d'évaluation borné (respectivement point d'évaluation analytique borné) si l'application φ_λ définie par $\varphi_\lambda(f) = f(\lambda)$ pour tout $f \in X$ est continue (respectivement l'application $\mu \longrightarrow \varphi_\mu$, est analytique au voisinage de λ.)

Cette notion a été prolongée pour les opérateurs cycliques sur des espaces de Banach arbitraires par L.Williams dans [16] comme suit : soient T un opérateur cyclique sur un espace de Banach X, de vecteur cyclique $x \in X$ et λ un nombre complexe est un point d'évaluation borné pour T s'il existe $M > 0$ tel que :

$$|P(\lambda)| \leq M\|P(T)x\|$$

pour tout polynômes P. Nous notons $\mathcal{B}(T)$ l'ensemble des points d'évaluations bornés de T. L'inéquation implique que l'application : $P(T)x \in X \to P(\lambda) \in \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction φ_λ linéaire continue sur X alors $\varphi_\lambda \in X^*$. Un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est un point d'évaluation analytique borné si $\lambda \in int(\mathcal{B}(T))$ (intérieur de $\mathcal{B}(T)$) et si pour tout $y \in X$, l'application $\widehat{y} : z \to < y, k(z) >$ est analytique en λ. Où $k(\lambda)$ est l'unique vecteur dans $N(T-\lambda)^*$ tel que $< x, k(\lambda) >= 1$.

On dira que T est un opérateur multicyclique d'ordre n (**n-** multicyclique) s'il existe n vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tel que $X = Span\{T^m x_i, m \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$ et si pour tout $n-1$ vecteurs $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in X$ on a $Span\{T^m y_i; m \geq 0; 1 \leq i \leq n-1\} \neq X$. Le **n**-uplet $x_1, x_2, ..., x_n$ est appelé le **n**-uplet cyclique de T. On notera par $\mathcal{C}_n(X)$ ensemble de tout les opérateurs **n-**multicyclique sur X, et pour $T \in \mathcal{C}_n(X)$, l'ensemble de tout les n-uplet cycliques de T est note $\mathcal{C}_n(T)$.

Points d'évaluations : Pour T un opérateur **n-**multicyclique sur X, soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{C}_n(T)$ on dira que $\lambda \in \sigma(T)$ est appelé point d'évaluation de T s' il existe $M > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |P_i(\lambda)| \leq M|| \sum_{i=1}^{n} P_i(T)x_i||$$

Pour toute famille de polynôme complexe $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$. on notera par $\mathcal{B}^n(T)$ l'ensemble des points d'évaluation de T.

$\lambda \in \mathbb{C}$ est un point d'évaluation analytique de T si $\lambda \in int(\mathcal{B}^n(T))$(l'intérieur de $\mathcal{B}^n(T)$) et si pour tout $y \in X$, l'application $\widehat{y_j} : z \mapsto < y, k_j(z) >$ est analytique en λ pour tout $j = 1, ...n$. L'ensemble des points d'évaluation analytique de T sera note $\mathcal{B}_a^n(T)$.

On définit un opérateur analytique dans le cas cyclique par : un opérateur T est analytique si $span\{k(\lambda), \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\} = X^*$. La définition s'étend au cas multicyclique voir le Chapitre 2.

Le but de cette partie est de caractériser les opérateurs analytiques dans le cas cycliques. En particulier, on caractérise leur commutant. Ce qui nous permet de déduire beaucoup de résultats sur la description spectrale des opérateurs analytiques et de retrouver certaine classe d'opérateur souvent étudier dans la littérature (Shift abstrait). Et d'étendre quand c 'est possible les résultats aux cas des opérateurs multicycliques.

Cette partie comporte deux chapitres. Dans le premier (Chapitre 1) intègre des rappels et des définitions dont on aura besoin. Dans le second (Chapitre 2) nous introduisons les opérateurs analytiques. Dans la Section 1 nous présentons les résultats concernant le commutant, l'image spectrale et les propriétés spectrales de leurs restrictions aux sous espaces invariants dans le cas cyclique.

Dans la Section 2 nous étudions les propriétés spectrales des opérateurs analytiques dans le cas multicyclique.

Partie III : Opérateurs de Composition.

L'étude des opérateurs de compositions a été l'objet de l'attention de nombreux mathématiciens voir par exemple le livre de Joel H. Shapiro [36].
Soit X un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$. Si φ est une fonction holomorphe de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$, l'opérateur de composition de symbole φ est défini par $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$, pour tout $f \in X$.

L'étude des opérateurs de composition consiste à comparer les propriétés de l'opérateur C_φ (continuité, compacité, spectre,...) avec celles de son symbole φ. Plus particulièrement, ce sont les propriétés géométriques de φ qui sont le plus souvent mises en avant.

Dans les années 60, J.Ryff [33], Eric Nordgen [31] et H.Schwartz [34] étudièrent le lien entre les propriétés des opérateurs de compositions et la théorie des fonctions. Leurs efforts ont été à l'origine d'un programme continu de recherche sur les opérateurs de composition tels que spectres [8, 6], compacité [30, 35] sous normalité etc. Chaque article dans cette liste(sûrement incomplète) illustre la richesse et le potentiel du sujet sur le lien entre l'analyse complexe et la théorie des opérateurs.

Le but de notre travail est l'étude de l'appartenance aux p-classe de Schatten dans les espaces de Hardy et Dirichlet à poids. Il se base essentiellement sur le travail de D.Luecking en 1987 [29] et D.Luecking et K.Zhu en 1992[26].

On note par $H(\mathbb{D})$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$. H^2 l'espace de Hardy, l'espace de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n\geq 0} \mid a_n \mid^2 < \infty$$

ou $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Comme toute fonction dans H^2 admet une limite radiale presque partout sur $\delta\mathbb{D}$, notée $f^* \in L^2(\delta\mathbb{D})$, nous avons :

$$\|f\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\mathbb{D}} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = \lim_{r\longrightarrow 1} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\mathbb{D}} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Il s'ensuit par la formule de Littlewood- Paley que :

$$\|f-f(0)\|_{H^2}^2=\int_{\mathbb{D}}|f^{'}(z)|^2log(\frac{1}{|z|})dA(z)$$

ou $dA(z)=\frac{dxdy}{\pi}$ mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. En utilisant cette formule, nous avons :

$$H^2=\{f\in H(\mathbb{D})\ ;\int_{\mathbb{D}}|f^{'}(z)|^2(1-|z|^2)dA(z)<\infty\}.$$

D.Luecking [29] a introduit les espaces $\mathcal{H}_\alpha$ $\alpha\geq 0$ par :

$$\mathcal{H}_\alpha=\int_{\mathbb{D}}|f^{'}(z)|^2(1-|z|^2)^\alpha dA(z)<\infty.$$

où $dA_\alpha=(1-|z|^2)^\alpha dA(z)$ Si 0< $\alpha<1$ alors $\mathcal{H}_\alpha:=\mathcal{D}_\alpha$ est l'espace de Dirichlet à poids $\alpha=0$ (resp.$\alpha=1$) correspond à l'espace de Dirichlet classique(resp. l'espace de Hardy). Si $\alpha>1$, $\mathcal{H}_\alpha$ est l'espace de Bergman à poids. Plus précisément, si $\mathcal{A}_\beta$ avec $(\beta>-1)$ est l'espace de Bergman à poids défini par :

$$\mathcal{A}_\beta=\{f\in H(\mathbb{D}):\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2dA_\beta(z)<\infty\}$$

alors $\mathcal{H}_\alpha=\mathcal{A}_{\alpha-2}$.

Soit T un opérateur compact défini sur un espace de Hilbert H et T^* son adjoint alors $(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur compact défini positif donc le spectre est contenu dans $\mathbb{R}^+$, de plus il est dénombrable. Soit (s_n) les valeurs propres associées. Si (s_n) est dans $l^p(\mathbb{N})$ alors l'opérateur T est dans les p-classes de schatten noté $\mathcal{S}_p(H)$, pour plus de détails voir [39].

Dans les années 80, B. MacCluer a constaté que, sur les espaces $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ espace de Bergman à poids et H^2 espace de Hardy, tout opérateur de composition peut se voir comme un opérateur d'inclusion de $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$(resp. $H^2(\mathbb{D})$) dans un espace $L^2(\mathbb{D};d\lambda_{\varphi,\alpha})$ (resp.$L^2(\mathbb{T};dm_\varphi)$) pour une certaine mesure $\lambda_{\varphi,\alpha}$(resp. m_φ) appelée mesure pré-image ou bien pull-back, qui n'est autre que la mesure image par φ de la mesure de Lebesgue à poids sur le disque unité (resp. la mesure de Lebesgue sur le tore $\mathbb{T}$).

La caractérisation de la continuité des opérateurs de composition se ramène ainsi à des théorèmes d'inclusion. La compacité des opérateurs de composition fut aussi caractérisée, en suivant les mêmes idées que pour la continuité.

Théorème. *(Mac-Cluer 85) (Dans H^2) Soit $\varphi:\mathbb{D}\longrightarrow\mathbb{D}$ une application holomorphe. Soit m_φ la mesure définie par*

$$m_\varphi(E)=m(\varphi^*)^{-1}(E).$$

pour tout borélien E de $\overline{\mathbb{D}}$, où m est la mesure de Lebesgue sur le cercle $\mathbb{T}$ et φ^* est la valeur de φ sur $\delta\mathbb{D}$ (limite radiale).

- *L'opérateur de composition C_φ est continu sur $\mathbb{D}$ si et seulement si m_φ est une mesure de Carleson, c.a.d*

$$m_\varphi(W(\xi;h))=O(m(W(\xi;h)))\ \ h\longrightarrow 0.$$

où $W(\xi;h)$ est la fenêtre de Carleson centrée en ξ , d'épaisseur h.

- *L'opérateur de composition C_φ est compact sur H^2 si et seulement si $m_\varphi$est une mesure de Carleson nulle sur le bord, c.a.d*
$$\rho_\varphi(h) = \sup_{\xi \in \mathbb{T}} m_\varphi[W(\xi, h)] = o(h);\ h \longrightarrow 0$$
.

Sur les espaces de Bergman à poids, nous avons le résultat suivant :

Théorème. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe. Soit $\lambda_{\varphi,\alpha}$ la mesure définie par*
$$\lambda_{\varphi,\alpha}(E) = A_\alpha(\varphi^{-1}(E))$$
pour tout borélien E de $\overline{\mathbb{D}}$.

- *L'opérateur de composition C_φ est continu sur $\mathcal{A}^2_\alpha(\mathbb{D})$ si et seulement si $\lambda_{\alpha,\varphi}$ est une mesure de Carleson, c.a.d*
$$\lambda_{\varphi,\alpha}(W(\xi;h)) = O(A_\alpha(W(\xi;h)))\ \ h \longrightarrow 0.$$
- *L'opérateur de composition C_φ est compact sur $\mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$ si et seulement si $\mu_{\varphi,\alpha}$ est une mesure de Carleson nulle sur le bord, c.a.d*
$$\lambda_{\varphi,\alpha}(W(\xi;h)) = o(A_\alpha(W(\xi;h)))\ \ h \longrightarrow 0.$$

En 1987, D.Luecking [29] caractérise l'appartenance à $\mathcal{S}_p(H^2)$ des opérateurs de composition en fonction de la mesure pré-image m_φ en utilisant la décomposition diadique du disque. Il obtient le résultat suivant :

Théorème. *Soit $p > 0$, l'opérateur de composition $C_\varphi : H^2 \longrightarrow H^2$ supposons que $|\varphi^*| < 1$ p.p. sur $\mathbb{T}$, Alors*
$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p(H_2) \ \texttt{si, et seulement si} \ \sum_1^\infty \sum_{i=0}^{2n-1} [2^n m_\varphi(R_{n,j})]^{\frac{p}{2}} < \infty.$$
Où
$$R_{n,j} = \left\{ re^{i\theta} \in \mathbb{D} :\ r_n \le r < r_{n+1}, \frac{2\pi j}{2^n} \le \theta < \frac{2\pi(j+1)}{2^n} \right\}$$
$j = 0, 1, .., 2^n - 1$ *et* $1 - r_n = 2^{-n}$.

Le résultat est similaire si l'on remplace de $R_{n,j}$ par $W_{n,j}$ voir [23] où
$$W_{n,j} = \left\{ re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}} : r_n \le r \le 1, \quad \frac{2j\pi}{2^n} \le \theta < \frac{2(j+1)\pi}{2^n} \right\}$$
Pour notre étude, il est plus pratique d'utiliser les fenêtres de Carleson $W_{n,j}$.

Nous avons un autre point de vue pour l'étude de la compacité et l'appartenance aux p-classes de Schatten pour les opérateurs de composition utilisant la fonction de comptage de Nevanlinna. Si φ est une fonction analytique sur $\mathbb{D}$, la fonction de comptage de Nevanlinna $N_{\varphi,\alpha}$ de φ associée à $\mathcal{H}_\alpha$ est définie par :
$$N_{\varphi,\alpha}(z) = \sum_{w \in \mathbb{D}\ :\ \varphi(w) = z} (1 - |w|^2)^\alpha, \qquad \texttt{si}\ \ z \in \varphi(\mathbb{D}) \diagdown \varphi(0)$$
$$N_{\varphi,\alpha}(z) = 0 \qquad \texttt{si}\ z \notin \varphi(\mathbb{D})$$

En 1987, J.H.Shapiro [35] caractérise la compacité de l'opérateur de composition dans l'espace de Hardy ($\alpha = 1$) en terme de la fonction de comptage de Nevanlinna $N_{\varphi,1} := N_\varphi$ comme suit :
C_φ est compact dans H_2 si, et seulement si $\lim\limits_{|w|\longrightarrow 1} \frac{N_\varphi(w)}{\log\frac{1}{|w|}} = 0$.
Ce résultat a été confirmé pour les espaces $\mathcal{D}_\alpha$ voir [19].

Cinq ans après, D.Luecking et K.Zhu [26], obtiennent une caractérisation simple pour qu'un opérateur de composition C_φ soit dans $\mathcal{S}_p(\mathcal{H}_\alpha)$ en fonction de $N_{\varphi,\alpha}$ ($\alpha \geq 1$). Récemment, J.Pau et P.A.Perez [32] donnent les mêmes résultats dans les espaces $\mathcal{D}_\alpha$ ($0 < \alpha < 1$). Nous résumons les deux résultats obtenus dans le Théorème suivant :

Théorème. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ holomorphe. Soient $\alpha > 0$ et $p > 0$ alors :*

$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{H}_\alpha) \qquad \Longleftrightarrow \qquad w \longrightarrow \frac{N_{\varphi,\alpha}(w)}{(1-|w|)^\alpha} \in L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{D}, d(\lambda)$$

Où $d(\lambda)$ est la mesure hyperbolique sur $\mathbb{D}$ définie par :

$$d(\lambda) = \frac{dA(z)}{(1-|z|^2)^2}.$$

D.Luecking [29], caractérise l'appartenance aux p-classe de Schatten ($0 < p < \infty$) sur les espaces de Bergman à poids $\mathcal{A}_\alpha$; en utilisant les opérateurs Toeplitz associés à une mesure positive μ (symbole).
Soit K_z^α le noyau reproduisant de $\mathcal{A}_\alpha$. Soit μ une mesure positive sur $\mathbb{D}$. L'opérateur Toeplitz T_μ associé au symbole μ, défini sur $\mathcal{A}_\alpha$est :

$$T_\mu^\alpha(f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\bar{w}z)^{2+\alpha}} d\mu(w) = \int_{\mathbb{D}} f(w) K_w^\alpha(z) d\mu(w), \qquad f \in \mathcal{A}_\alpha.$$

la transformé de Berezin de μ notée $\widetilde{\mu}^\alpha$ est donné par :

$$\widetilde{\mu}^\alpha(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{4+2\alpha}} d\mu(w) = \frac{\langle T_\mu^\alpha K_z^\alpha, K_z^\alpha \rangle_{\mathcal{A}_\alpha}}{K_z^\alpha(z)}.$$

Alors la bornitude, la compacité de $\mathbf{T}_\mu$ sont confirmés par :

Théorème. *Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. $\mathbf{T}_\mu$ *est borné sur* $\mathcal{A}_\alpha$,
2. $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \widetilde{\mu}^\alpha(z) < \infty$.

Théorème. *Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. $\mathbf{T}_\mu$ *est compact sur* $\mathcal{A}_\alpha$,
2. $\widetilde{\mu}^\alpha(z) \to 0$ *lorsque* $|z| \to 1-$.

Pour plus de détails voir [39]. D.Luecking [29] donne la caractérisation suivante :

Théorème (Luecking 87)**.** *Soit $p \geq 1$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. $\mathbf{T}_\mu \in \mathcal{S}_p(\mathcal{A}_\alpha)$,

2. $\sum_{n} 2^{(2+\alpha)np} \sum_{j=0}^{2^n-1} \Big[\mu(R_{n,j})\Big]^p < \infty,$

3. $\int_{\mathbb{D}} \Big[\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{4+2\alpha}} d\mu(z)\Big]^p \frac{dA(w)}{(1-|w|^2)^2} < \infty.$

La démonstration de l'équivalence ($1 \iff 2$) dans [29] est compliquée , nous donnons une démonstration simple voir (Chapitre 3).

Les points de contact de la fonction φ avec bord joue un rôle essentiel. Alors nous avons besoin d'introduire les ensembles niveaux E_φ. Pour $s \in (0,1)$, l'ensemble niveau $E_\varphi(s)$ de φ est donnée par

$$E_\varphi(s) = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| \geq s\}.$$

$$E_\varphi = E_\varphi(1)$$

Il convient de mentionner qu'une condition nécessaire pour la compacité dans H^2 est :

$$C_\varphi \text{ compact} \Longrightarrow |E_\varphi| = 0$$

Par ailleurs dans [14], il ont prouvé l'existence d'un opérateur de composition C_φ(symbole univalent) dans H^2 tel que la mesure de Hausdorff de E_φ est égale à 1. Ce résultat à été généralisé dans [11] comme suit :

Théorème (2011)**.** *Si K est un compact contenu dans $\mathbb{T}$ tel que $m(K) = 0$, où m est la mesure de Lebesgue. Alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi \in A(\mathbb{D})$ tel que C_φ est un opérateur de Hilbert-Schmidt* H^2 *et $E_\varphi = K$*

Dans les chapitres 1, nous introduisons les outils nécessaires à notre contribution, les mesures de Hausdorff, capacité, les différents espaces $(\mathcal{A}_\alpha, H^2, \mathcal{D}_\alpha)$. Dans le Chapitre 2, nous rappelons les résultats déjà établis pour les opérateurs de compositions : bornitude compacité et l'appartenance aux p-classes de Schatten dans les différents espaces introduit.

Le chapitre 3, a fait l'objet d'un article publié à Math.Z en 2014 [2]. Dans la section 2 nous donnons une preuve simple du Théorème de D.Luecking [29] caractérisant l'appartenance aux p-classes de Schatten concernant les opérateurs Toeplitz. Dans la Section 3, nous donnons une condition suffisante à l'appartenance à $\mathcal{S}_p(H^2)$. Cette approche a permis d'établir des exemples explicites d'opérateurs dans les p-classes de Schatten. Par ailleurs, si le symbole est une fonction extérieure admettant un seul point de contact, nous donnons une caractérisation complète à l'appartenance à $\mathcal{S}_p(H^2)$. Comme conséquence, nous avançons un exemple d'opérateur C_φ dans H^2 n'appartenant à aucune classe de Schatten. Aussi si $q > 0$ il existe un opérateur de composition compact C_φ telle que

$$C_\varphi \in \bigcap_{p>q} \mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2) \backslash \mathcal{S}_q(\mathrm{H}^2).$$

Dans la dernière section, nous étudions le lien entre l'appartenance à $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$ et la α- capacité de l'ensemble des points de contact.

Première partie

Suites de Fibonnacci et chaines de Markov

Chapitre 1

Suites de Fibonacci généralisées et chaînes de Markov

1.1 Introduction.

Le présent chapitre consiste à exposer les liens entre les suites de Fibonacci généralisées, les chaînes de Markov et les processus stochastiques associés. Plus précisément, il s'agit de présenter les deux principales formulations matricielles des suites de Fibonacci généralisées dont on déduit le lien avec les chaînes de Markov et les processus stochastiques. De plus on donnera les résultats importants nécessaires à notre contribution. Plus précisément, le but est de nous permettre de mieux cerner la porté des résultats du chapitre suivant. Nous nous basons essentiellement ici sur les travaux de Mouline-Rachidi [23, 24, 25].

Une suite de Fibonacci généralisée $\{V_n\}_{n\geq 0}$ est définie par la donnée des conditions initiales $V_0, \cdots, V_{r-1}$ et la relation de récurrence linéaire d'ordre r suivante,

$$V_{n+1} = a_0 V_n + a_1 V_{n-1} + \cdots + a_{r-1} V_{n-r+1}, \text{pour } n \geq r-1, \tag{1.1}$$

où $a_0, \cdots, a_{r-1}$ ($r \geq 2$, $a_{r-1} \neq 0$) sont des nombres réels fixés, appelés *coefficients* de la suite (1.1). Dernièrement, des propriétés importantes de ces suites ont été élaborées par le biais de la théorie des processus stochastiques (voir [23, 24, 25]). En effet, grâce à deux formulations matricielles des suites (1.1), Mouline-Rachidi ont pu établir de nombreux résultats, à l'aide des propriétés des processus stochastiques et celles des chaînes de Markov associées. En particulier, ils ont réussit à généraliser des résultats sur la convergence, le comportement asymptotique et l'aspect combinatoire de ces suites.

Les méthodes de Mouline-Rachidi ont été exploité récemment, pour étudier l' aspect stochastique de la suite de Fibonacci classique $\{F_n\}_{n\geq 0}$ où $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$ (voir [13, 14]). De plus, des travaux en physique mathématique ont fait un usage intéressant des résultats de Mouline -Rachidi sur les suites de Fibonacci et les chaines de Markov (voir [29]). Par ailleurs, la première formulation matricielle ([23])

et les propriétés combinatoire déduites de la seconde ([5]) ont été à l'origine de l'étude générale des suites de Fibonacci dans une algèbre de matrices ([4, 5, 6]), qui a permis d'obtenir des résultats importants concernant les systèmes dynamiques.

Afin de mieux cerner la porté de nos résultats qui seront présentés au chapitre suivant, on a opté d'exposer dans le présent chapitre les liens entre les suites de Fibonacci généralisées et les chaînes de Markov. Plus précisément, il s'agit d'un travail préliminaire sur les deux principales formulations matricielles et l'aspect combinatoires des suites (1.1), dont on déduit le lien avec les chaînes de Markov et quelques conséquences.

Pour des raisons de simplicité on adoptera tout au long de ce texte la notation r-SFG pour désigner les suites de Fibonacci généralisées d'ordre r.

1.2 r-SFG et chaînes de Markov : Première Formulation

1.2.1 Préliminaire

Soit $\{V_n\}_{n\geq 0}$ la suite définie par (1.1), ayant pour conditions initiales $V_0, \cdots, V_{r-1}$ ($r \geq 2$) et pour coefficients $a_0, \cdots, a_{r-1}$ ($a_{r-1} \neq 0$). Posons

$$X_n = \begin{pmatrix} V_n \\ V_{n-1} \\ \vdots \\ V_{n-r+1} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{r-2} & a_{r-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

En utilisant les expressions (1.2) on vérifie que l'expression (1.1) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante,

$$X_{n+1} = AX_n, \quad \text{pour tout } \ n \geq r-1. \tag{1.3}$$

L'expression (1.3) a été considérée dans plusieurs travaux, pour étudier les propriétés des nombres de Fibonacci $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ où $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et les suites de Fibonacci d'une façon générale (voir [16, 23, 24, 25] par exemple).

1.2.2 r-SFG à coefficients non négatifs de somme 1 et chaînes de Markov

Supposons que les coefficients $a_0, \cdots, a_{r-1}$ soient non négatifs et satisfassent la condition suivante,

$$\sum_{i=0}^{r-1} a_i = 1$$

Alors la matrice A est une matrice stochastique. Par suite, elle représente la matrice de transition d'une chaîne de Markov dont l'espace des états est l'ensemble $E = \{0, 1, 2, ..., r-1\}$.

Soit $i_0 = Sup\{i \in E : a_i > 0\}$, alors les états $0, 1, ..., i_0$ constituent une classe d'état récurrents positifs et les autres états $i_0, ..., r-1$, sont des états transitoires (voir [15] par exemple). En effet, partant de l'état 0 on peut arriver à l'un des états $i \leq i_0$ en une transition avec la probabilité a_i et on retourne à l'état 0 avec la probabilité 1 en i transitions. Donc, a_i est la probabilité pour que, partant de l'état 0, on retourne à 0 pour la première fois après $i+1$ transitions. Soit $i > i_0$ un état transitoire, alors le processus partant de i est absorbé par la classe récurrente avec la probabilité 1 après $i - i_0$ transitions et ne retourne plus à état i.

Soient $i, j \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $p^{(n)}(i,j)$ est la la probabilité pour que partant de l'état i on arrive à l' état j après n transitions. Par suite, $p^{(n)}(i,j)$ est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A^n .

Soit i un état récurrent, la période de cet état est par définition, le nombre $d = P.G.D.C.\{n \in \mathbb{N} : p^n(i,i) > 0\}$.

Il est bien connu que les éléments d'une classe récurrente ont la même période (voir [15]). C'est pourquoi nous parlons de la période d'une classe et non d'un état. Ainsi, la période de l'état 0 est la même que celle de l'état i, pour tout $i \leq i_0$.

Nous rappelons ici un théorème classique sur les chaînes de Markov, théorème que nous allons utiliser par la suite .

Théorème 1.2.1. *([16]) Soit A une matrice de transition d'une chaîne de Markov dont l'espace des états est $E = \{0, 1, 2, ..., r-1\}$, ayant une seule classe récurrente positive de période d. alors :*

(i) La suite matricielle $(A^n)_{n\geq 1}$ tend vers une limite Q quand n tend vers $+\infty$, si et seulement si, la chaîne de Markov est apériodique(c'est à dire si $d = 1$) .

(ii) La limite Q de $(A^n)_{n\geq 1}$ est une matrice à lignes identiques, c'est-à-dire

$$Q = \begin{pmatrix} \Pi(0) & \Pi(1) & \cdots & \Pi(r-2) & \Pi(r-1) \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ \Pi(0) & \Pi(1) & \cdots & \Pi(r-2) & \Pi(r-1) \end{pmatrix},$$

où $\Pi = (\Pi(0), \Pi(1), ..., \Pi(r-1))$ *est la distribution stationnaire de la chaîne de Markov, solution de l'équation matricielle*

$$\Pi = \Pi A \quad avec \quad \Sigma_{i=0}^{r-1}\Pi(i) = 1.$$

La première partie du Théorème 1.2.1 nous permet d'énoncer le Théorème suivant.

Théorème 1.2.2. *([23]) Soit $\{V_n\}_{n\geq 0}$ une suite (1.1), c'est à dire la suite définie par la donnée de $V_0, \cdots, V_{r-1}$ et la relation de récurrence,*

$$V_{n+1} = a_0 V_n + a_1 V_{n-1} + \cdots + a_{r-1} V_{n-r+1}, \quad pour \quad n \geq r-1,$$

Supposons que les coefficients $a_0, a_1, ..., a_{r-1}$ soient non négatifs vérifiant l'identité $\sum_{i=0}^{r-1} a_i = 1$ alors, la suite de Fibonacci généralisée $\{V_n\}_{n\geq 0}$ est convergente pour tout choix arbitraire des conditions initiales si, et seulement si, $P.G.D.C.\{i+1 : a_i > 0\} = 1$.

La seconde partie du Théorème 1.2.1 permet d'obtenir la forme explicite de la limite des suites (1.1). En effet, on a le résultat suivant.

Théorème 1.2.3. *([23]) Soit $\{V_n\}_{n\geq 0}$ une suite (1.1), c'est à dire la suite définie par la donnée de $V_0, \cdots, V_{r-1}$ et la relation de récurrence,*

$$V_{n+1} = a_0 V_n + a_1 V_{n-1} + \cdots + a_{r-1} V_{n-r+1}, \quad \textit{pour} \quad n \geq r-1.$$

Si P.G.D.C.$\{i+1 : a_i > 0\} = 1$ alors, la limite de la suite (1.1) est donnée par,

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \Pi(0)V_{r-1} + \Pi(1)V_{r-2} + ... + \Pi(r-1)V_0$$

$$\textit{avec} \quad \Pi(i) = \frac{\sum_{j=i}^{r-1} a_j}{\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)a_j}.$$

Remarque. Le nombre $\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)a_j$ représente le temps moyen du premier retour à l'état 0 de la chaîne de Markov.

1.2.3 r-SFG à coefficients non négatifs quelconques et chaînes de Markov

Supposons que $a_0, \cdots, a_{r-1}$ sont des nombres réels non négatifs ($r \geq 2$) dont la somme n'est pas nécessairement égale à 1. Considérons la suite $\{V_n\}_{n\geq 0}$ définie par (1.1), ayant pour coefficients $a_0, \cdots, a_{r-1}$ et pour conditions initiales $V_0, \cdots, V_{r-1}$. On a vu que la suite (1.1) est équivalente à l'équation matricielle donnée par (1.2) et (1.3).

Comme $\sum_{i=0}^{r-1} a_i \neq 1$, alors la matrice A définie en (1.3) n'est pas stochastique. Cependant on pourra appliquer les résultats étudiés au paragraphe 1.2.2. Pour cela on considère l'équation caractéristique associée à la suite $\{V_n\}_{n\geq 0}$, donnée par

$$x^r = a_0 x^{r-1} + \cdots + a_{r-2}x + a_{r-1}.$$

Il bien connu que cette équation algébrique admet une solution unique $q > 0$ (voir [26] par exemple). Cette solution $q > 0$ à été exploitée dans les travaux de Mouline-Rachidi [23, 24, 25], en particulier pour exploiter les résultats de la sous-section 1.2.2, comme suit. En effet, Soient $b_0, b_1, \cdots, b_{r-1}$ les nombres réels non négatifs définis par,

$$b_j = \frac{a_j}{q^{j+1}} \text{ avec } 0 \leq j \leq r-1$$

alors, il est claire qu'on a $b_0 + b_1 + \cdots + b_{r-1} = 1$. Posons $W_n = \frac{V_n}{q^n}$, pour $n \geq 0$, donc on a,

(i) $W_j = \frac{V_j}{q^j}$, $j = 0, \cdots, r-1$,

(ii) $W_{n+1} = a_0 W_n + a_1 W_{n-1} + \cdots + a_{r-1} W_{n-r+1}$, pour $n \geq r-1$.

Un calcul direct nous permet de vérifier alors, que la la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est une suite (1.1). Par conséquent, ceci nous met dans les conditions du Théorème 1.2.3, qu'on peut appliquer à la suite $(W_n)_{n\geq 0}$, dont on déduit la forme explicite de sa limite.

Théorème 1.2.4. *([23]) Soit Soit $\{V_n\}_{n\geq 0}$ une suite (1.1), c'est à dire la suite définie par la donnée de $V_0, \cdots, V_{r-1}$ et la relation de récurrence,*

$$V_{n+1} = a_0 V_n + a_1 V_{n-1} + \cdots + a_{r-1} V_{n-r+1}, \quad pour \quad n \geq r-1,$$

où $a_0, \cdots, a_{r-1}$sont des réels non négatifs donnés. Si P.G.D.C.$\{i+1 : a_i > 0\} = 1$ alors, $\{W_n\}_{n\geq 0}$ est une suite de type (1.1), dont la limite de la suite est donnée par,

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \Pi'(0)W_{r-1} + \Pi'(1)W_{r-2} + ... + \Pi'(r-1)W_0$$

avec

$$\Pi'(i) = \frac{\sum_{j=i}^{r-1} \frac{a_j}{q^{j+1}}}{\sum_{j=0}^{r-1}(j+1)\frac{a_j}{q^{j+1}}}.$$

1.3 r-SFG et chaînes de Markov : seconde Formulation

1.3.1 Formulation stochastique des suites (1.1)

Nous utilisons ici les propriétés des chaînes de Markov pour étudier d'autres propriétés des suites (1.1). Nous obtenons une expression combinatoire du terme général de la suite de Fibonacci indépendamment des conditions initiales. D'où une nouvelle expression de la limite.

Soit $\{V_n\}_{n\geq 0}$ une suite (1.1), ayant pour conditions initiales $V_0, V_1, ..., V_{r-1}$ et dont les coefficients $a_0, \cdots, a_{r-1}$ sont non négatifs et satisfient la condition suivante,

$$\sum_{i=0}^{r-1} a_i = 1.$$

Posons

$$X = \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_n \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} & I_r & & | & & 0 & & & \\ a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & & \\ 0 & 0 & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & & & & & & \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

où I_r est la matrice identité $r \times r$. La condition $\sum_{i=0}^{r-1} a_i = 1$ implique que $P = (P(n,m))_{n\geq 0, m\geq 0}$ est une matrice stochastique, qui représente la matrice de transition de la chaine de Markov, dont l'espace des états est $I\!N = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Un calcul direct permet de voir que la suite (1.1), prend la forme matricielle équivalente suivante,

$$X = PX \tag{1.5}$$

Considérons le théorème général suivant sur la convergence des suites de matrice $\{P^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, avec $P^{(k)} = P.P\cdots P$ (k temps).

Théorème 1.3.1. *(voir [15], [17] par exemple). Soit* $P = (P(n,m))_{n\geq 0, m\geq o}$ *la matrice de transition de la chaine de Markov associée à la matrice* P *donnée par (1.5). Alors, la suite* $\left\{P^{(k)}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ *converge en moyenne de Césaro. Plus précisément, la suite* $\{Q_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *définie par* $Q_k = \frac{P+P^{(2)}+\cdots+P^{(k)}}{k}$ *converge vers la matrice* $Q = \{q(n,m)\}_{n\geq 0, m\geq 0}$ *avec* $q(n,m) = \frac{\rho(n,m)}{\mu_m}$ *; où* $\rho(n,m)$ *est la probabilité d 'atteindre l'état* m *à partir de l'état* n*, et* μ_m *est la moyenne de la variable réelle qui donne le temps du premier retour à l'état* m*, partant de* m*.*

Nous observons que les états $0, 1, \cdots r-1$ sont des états absorbants et les autres états $r, r+1, \cdots$ sont des états transitoires ; car partant d'un état $n \geq r$ le processus sera absorbé avec la probabilité 1, par l'un des états $0, 1, \cdots r-1$ après $n-r+1$ transitions. Si m est un état transitoire on a $\mu_m = +\infty$ (voir [17]), donc $q(n,m) = 0$ pour $m = r, r+1, \cdots$. Si n et m sont des états absorbants on a $\mu_m = 1$ et $\rho(n,m) = \delta_{n,m}$. Ainsi la matrice limite Q du Théorème 2.1 admet la forme suivante,

$$Q = \begin{pmatrix} & I_r & & | & 0 & \\ \rho(r,0) & \cdots & \rho(r,r-1) & & 0 & \cdots \\ \rho(r+1,0) & \cdots & \rho(r+1,r-1) & & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \rho(n,0) & \cdots & \rho(n,r-1) & & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

A partir l'expression de la suite (1.1) et l'équation (1.5) nous avons l'équation matricielle,

$$X = P^n X \quad n \geq 1, \tag{1.7}$$

qui est équivalente à $X = Q_n X$ pour $n \geq 1$, avec $Q_n = \frac{P+P^{(2)}+\cdots+P^{(n)}}{n}$. On a donc $X = QX$, où Q est donnée par (1.6). Nous obtenons alors le résultat suivant.

Théorème 1.3.2. *. Soient* $a_0, \cdots, a_{r-1}$ *des nombres réels non négatives tel que* $\sum_{i=1}^{r-1} a_i = 1$*. Soit* $\{V_n\}_{n\geq 0}$ *une suite (1.1), ayant pour coefficients* $a_0, \cdots, a_{r-1}$ *et pour conditions initiales* $V_0, \cdots, V_{r-1}$*. Alors, pour tout* $n \geq r-1$*, l'expression du terme général* V_n *de la suite (1.1) est donnée par,*

$$V_n = \rho(n,0)V_0 + \rho(n,1)V_1 + \cdots + \rho(n,r-1)V_{r-1}. \tag{1.8}$$

où $\rho(n,j)$ $(0 \leq j \leq r-1)$ *est la probabilité d'atteindre l'état* j *partant de l'état* n*.*

Notons que le nombre $\rho(n,j)\,(0 \leq j \leq r-1)$ représente la probabilité que le processus soit absorbé par l'état j, partant de l'état n. Le théorème 1.3.2 donne l'expression du terme général V_n pour $n \geq r-1$, en fonction des conditions initiales $V_0, \cdots, V_{r-1}$ et les probabilités d'absorption $\rho(n,j)$.

Nous allons donner une forme explicite de $\rho(n,m)$ pour tout n, $m \in I\!N$. Sachant que pour tout $n > m \geq r$ le nombre $\rho(n,m)$ est la probabilité d'arriver à l'état m partant de l'état n. Cependant, $\rho(n,m)$ pour $n > m \geq r$ n'est pas une probabilité d'absorption par l'état m partant de l'état n, car l' état $m \geq r$ est un état transitoire.

1.3.2 Expression combinatoire de $\rho(n,m)$

Soient n, m deux états tels que $n > m \geq r$. Partant de l'état n le processus atteint l'état $l < n$ après une transition, avec la probabilité a_{n-l-1}. On dira que le processus a fait un saut de $n-l$ unité.

Pour atteindre l'état m partant de l'état n, le processus doit effectuer k_0 saut de 1 unité avec la probabilité a_0 pour chaque saut, k_1 saut de 2 unités de probabilité a_1 pour chaque saut, $\cdots$, k_{r-1} saut de r unités de probabilité a_{r-1} pour chaque saut. Le déplacement total est $n-m$, et nous avons

$$k_0 + 2k_1 + \cdots + rk_{r-1} = n - m$$

Le nombre total de sauts est $k_0 + k_1 + \cdots + k_{r-1}$ et le nombre de manière de choisir k_0 saut de 1 unité, k_1 saut de 2 unités,$\cdots$, k_{r-1} saut de r unités est

$$\frac{(k_0 + k_1 + \cdots + k_{r-1})!}{k_0!k_1!\cdots k_{r-1}!}$$

La probabilité pour chaque choix est $a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdots a_{r-1}^{k_{r-1}}$. Par conséquent on a le résultat suivant,

Théorème 1.3.3. *. Pour deux états n, m ($n > m \geq r$) la probabilité $\rho(n,m)$ d'atteindre l'état m à partir de l'état n est donnée par,*

$$\rho(n,m) = \sum_{k_0+2k_1+\cdots+rk_{r-1}=n-m} \frac{(k_0 + k_1 + \cdots + k_{r-1})!}{k_0!k_1!\cdots k_{r-1}!} a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdots a_{r-1}^{k_{r-1}}. \tag{1.9}$$

Notons que pour $n > m \geq r$ on a $\rho(n,m) = H_{n-m+1}^{(r)}(a_0,\cdots,a_{r-1})$, où $\{H_{n-m+1}^{(r)}(a_0,\cdots,a_{r-1})\}_{n\geq 0}$ est la suite de polynôme de Fibonacci à plusieurs variables d'ordre r de Philippou (voir [28]).

1.3.3 Calcul de la probabilité d'absorption

Soient n, j deux états tels que $0 \leq j < r \leq n$. Donc, n est un état transitoire, j est un état absorbant et $\rho(n,j)$ est la probabilité d'absorption du processus par l'état j, partant de l'état n. Nous supposons d'abord que $n \geq 2r$ et $j = 0$. Pour atteindre 0 partant de n, l'avant dernier état transitoire visité par le processus est l'état r, et a_{r-1} est la probabilité du saut de l'état r à l'état 0. Par suite, pour aller de l'état n à l'état 0 le processus doit aller de l'état n à l'état r et de l'état r à l'état 0, ceci implique que l'on a $\rho(n,0) = a_{r-1}\rho(n,r)$. Plus précisément, pour atteindre j $(0 \leq j \leq r-1)$ à partir de n $(n \geq 2r)$ le processus doit visiter l'un des états suivants $r, r+1, \cdots, r+j$, car ils sont les seuls états pour lesquels le processus peut atteindre l'état j en un saut. Comme $a_{r+k-j-1}$ $(0 \leq k \leq j)$ est la probabilité d'aller de l'état $r+k$ à l'état j et $\rho(n,r+k)$ est la probabilité d'aller de l'état n à l'état $r+k$, on obtient ;

$$\rho(n,j) = a_{r-j-1}\rho(n,r) + a_{r-j}\rho(n,r+1) + \cdots + a_{r-1}\rho(n,r+j). \tag{1.10}$$

A partir de l'expression (1.9), on déduit que $\rho(n,r+l) = \rho(n-l,r)$ pour tout $n > r+l$. Soit pour tout $n \geq 2r$ et j $(0 \leq j < r)$, on a :

$$\rho(n,j) = a_{r-j-1}\rho(n,r) + a_{r-j}\rho(n-1,r) + \cdots + a_{r-1}\rho(n-j,r).$$

Si on suppose que $n < 2r$, alors on a les deux cas suivants. Si $r + j \leq n$ l'expression (1.10) est encore vérifiée. Pour le second cas $r \leq n < r + j$ on a :

$$\rho(n, j) = a_{r-j-1}\rho(n, r) + a_{r-j}\rho(n-1, r) + \cdots + a_{n-j-1}\rho(r, r).$$

Par conséquent, l'expression de la probabilité $\rho(n, j)$ est donnée par,

Théorème 1.3.4. *Soient n, j deux états tels que $0 \leq j < r \leq n$. Alors, si $\rho(i, i) = 1$ et $\rho(i, k) = 0$ pour $i < k$, la probabilité d'absorption $\rho(n, j)$ est donnée par ,*

$$\rho(n, j) = a_{r-j-1}\rho(n, r) + a_{r-j}\rho(n-1, r) + \cdots + a_{r-1}\rho(n-j, r), \tag{1.11}$$

où $\rho(n, 0) = a_{r-1}\rho(n, r)$.

Expression combinatoire de V_n. Soient $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}$ des nombres réels non négative tel que $\sum_{i=0}^{r-1} a_i = 1$. Soit $\{V_n\}_{n\geq 0}$ une suite (1.1), ayant pour coefficients $a_0, \cdots, a_{r-1}$ et pour conditions initiales $V_0, \cdots, V_{r-1}$. En substituant l'expression (1.11) dans (1.9) on obtient

$$V_n = A_0\rho(n, r) + A_1\rho(n-1, r) + \cdots + A_{r-1}\rho(n-r+1, r)$$

où

$$A_m = a_{r-1}V_m + a_{r-2}V_{m+1} + \cdots + a_m V_{r-1}$$

pour $m = 0, 1, \cdots, r-1$. Alors, nous avons le résultat suivant,

Théorème 1.3.5. *. Soit $\{V_n\}_{n\geq 0}$ une suite (1.1), ayant pour coefficients $a_0, \cdots, a_{r-1}$ et pour conditions initiales $V_0, \cdots, V_{r-1}$. Supposons que les coefficients $a_0, \cdots, a_{r-1}$ sont non négative et $\sum_{i=0}^{r-1} a_i = 1$. Alors, pour tout $n \geq r-1$, on a*

$$V_n = A_0\rho(n, r) + A_1\rho(n-1, r) + \cdots + A_{r-1}\rho(n-r+1, r), \tag{1.12}$$

où $A_m = a_{r-1}V_m + \cdots + a_m V_{r-1}$; $m = 0, 1, \cdots, r-1$ et $\rho(k, r)$ sont données par (1.9) avec $\rho(r, r) = 1$ et $\rho(k, r) = 0$ si $k < r$.En particulier, si nous posons $V_0 = 1$ et $V_1 = \cdots = V_{r-1} = 0$, on obtient $V_n = a_{r-1}\rho(n, r)$, donc la suite $\{\rho(n, r)\}_{n=0}^{+\infty}$ satisfait également la relation de récurrence suivante,

$$\rho(n+1, r) = a_0\rho(n, r) + a_1\rho(n-1, r) + \cdots + a_{r-1}\rho(n-r+1, r). \tag{1.13}$$

La relation (1.13) peut être prouver autrement en considérant les sauts du processus de l'état $n + 1$ à l'état r.

Cas général et résultat de Levesque. Si on suppose que les coefficients $a_0, \cdots, a_{r-1}$ sont des nombres réels arbitraire, on définie le nombre $\rho(n, r)$ donné par (1.9). Alors, on peut prouver par induction sur n que l'expression (1.13) est satisfaite. Donc, le Théorème 1.3.5 est encore valable dans le cas général. Ce résultat a été établi par Levesque dans [19].

1.4 Suites (1.1), chaînes de Markov et Théorème de Cayley-Hamilton

1.4.1 Une formulation matricielle des suites (1.1)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie r et $u : E \to E$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Soit $P(\lambda)$ le polynôme caractéristique de u, qui peut être considéré sous la forme :

$$P(\lambda) = \lambda^r - a_0\lambda^{r-1} - .... - a_{r-1}.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a :

$$P(u) = u^r - a_0u^{r-1} - ..... - a_{r-1}1_d = \Theta \tag{1.14}$$

où $u^m = u \circ u \circ .... \circ u$ (m fois), Θ est l' application nulle et 1_d l'application identité. Donc, on a :

$$u^r = a_0u^{r-1} + a_1u^{r-2} + ... + a_{r-1}1_d \tag{1.15}$$

Supposons que $\{e_0, e_1, ..., e_{r-1}\}$ base de E, avec $r \in \mathbb{N}$ et $r \geq 2$. Soit $X^{(0)} = x_0^{(0)}e_0 + x_1^{(0)}e_1 + ... + x_{r-1}^{(0)}$ un vecteur de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose,

$$X^{(n)} = u^nX^{(0)} = x_0^{(n)}e_0 + x_1^{(n)}e_1 + ... + x_{r-1}^{(n)}e_{r-1}.$$

D'après (1.15) nous avons alors,

$$u^n = a_0u^{n-1} + a_1u^{n-2} + ... + a_{r-1}u^{n-r} \text{ pour tout } n \geq r \tag{1.16}$$

alors,

$$X^{(n)} = a_0X^{(n-1)} + ... + a_{r-1}X^{(n-r)} \text{ pour tout } n \geq r \tag{1.17}$$

Sachant que $X^{(n)} = (x_i^{(n)})_{(0\leq i\leq r-1)}$ alors, à l'aide de l'expressiion (1.17), on a

$$x_i^{(n)} = a_0x_i^{(n-1)} + a_1x_i^{(n-2)} + ... + a_{r-1}x_i^{(n-r)} \quad \text{pour tout} \quad n \geq r \tag{1.18}$$

Ainsi, pour chaque i tel que $(0 \leq i \leq r-1)$ la suite $\{x_i^{(n)}\}_{n\geq 1}$, ayant pour conditions initiales $x_i^{(0)}, x_i^{(1)}, .., x_i^{(r-1)}$, est une suite (1.1). Donc, pour tout i tel que $(0 \leq i \leq r-1)$ l'expression (1.12) implique que l'on a,

$$x_i^{(n)} = A_0^{(i)}\rho(n, r) + A_1^{(i)}\rho(n-1, r) + \cdots + A_{r-1}^{(i)}\rho(n-r+1, r), \text{ pour tout } n \geq r \tag{1.19}$$

où les $\rho(m, r)$ est donnée par la formule (1.9) et

$$A_m^{(i)} = a_{r-1}x_i^m + a_{r-2}x_i^{m+1} + ... + a_mx_i^{r-1} \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq m \leq r-1. \tag{1.20}$$

A partir des expressions (1.17),(1.19),(1.20) nous déduisons la formule suivante

$$X^n = X_0\rho(n, r) + X_1\rho(n-1, r) + \cdots + X_{r-1}\rho(n-r+1, r), \text{ pour tout } n \geq r \tag{1.21}$$

avec,

$$X_m = a_{r-1}X^m + a_{r-2}X^{m+1} + ... + a_m X^{r-1} \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq m \leq r-1 \tag{1.22}$$

Comme le vecteur $X^0 = x_0^0 e_0 + x_1^0 e_1 + ... + x_{r-1}^0 e_{r-1}$ est arbitraire dans E nous obtenons à partir des expressions (1.19) et (1.22) la formule suivante,

$$u^n = U_0\rho(n,r) + U_1\rho(n-1,r) + \cdots + U_{r-1}\rho(n-r+1,r), \text{ pour tout } \ n \geq r \tag{1.23}$$

où

$$U_m = a_{r-1}u^m + a_{r-2}u^{m+1} + ... + a_m u^{r-1} \quad \text{pour tout} \quad 0 \leq m \leq r-1. \tag{1.24}$$

Par conséquent, nous avons le résultat suivant,

Théorème 1.4.1. *([25]) Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie r ($r \geq 2$) et $u : E \to E$ application $\mathbb{R}$-linéaire. Soit $P(\lambda) = \lambda^r - a_0\lambda^{r-1} - a_1\lambda^{r-2} - .. - a_{r-1}$ le polynôme caractéristique de u . Alors, nous avons :*

$$u^n = U_0\rho(n,r) + U_1\rho(n-1,r) + \cdots + U_{r-1}\rho(n-r+1,r), \quad \textit{pour tout} \quad n \geq r,$$

où $\rho(m,r)$ sont donnés par les expressions (1.9) et

$$U_m = a_{r-1}u^m + a_{r-2}u^{m+1} + ... + a_m u^{r-1} \quad \textit{pour tout} \quad 0 \leq m \leq r-1$$

A partir du Théorème 1.4.1 nous déduisons le corollaire suivant,

Corollaire 1.4.2. *Soient M une matrice carrée $r \times r$ et*

$$P(\lambda) = \lambda^r - a_0\lambda^{r-1} - a_1\lambda^{r-2} - .. - a_{r-1}$$

son polynôme caractéristique. Alors, pour tout $n \geq r$, nous avons :

$$M^n = M_0\rho(n,r) + M_1\rho(n-1,r) + \cdots + M_{r-1}\rho(n-r+1,r), \ \textit{pour tout} \ \ n \geq r, \tag{1.25}$$

où les $\rho(m,r)$ sont données par(1.9) et

$$M_m = a_{r-1}M^m + a_{r-2}M^{m+1} + ... + a_m M^{r-1} \quad \textit{pour tout} \ \ 0 \leq m \leq r-1. \tag{1.26}$$

1.4.2 Application aux chaînes de Markov.

Soit $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ une fonction aléatoire associée à une chaîne de Markov dont l'espace des états Γ est fini ou dénombrable. On pose $\Gamma = \{1, 2, ...\}$. Supposons qu'il existe un nombre fini r d'états transitoires. Soient $\zeta_1, \zeta_2...., \zeta_k, ...$ l'ensemble des classes des états récurrents et posons $\zeta = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \zeta_k$. Soit P la matrice de transition de la chaîne de Markov et M sa restriction à l'ensemble Θ des états transitoires,

$$P = (P(i,j))_{i,j} \in \Gamma \quad \text{et} \quad M = (P(i,j))_{i,j} \in \Theta.$$

Donc, M est une matrice carrée $r \times r$.

Soit ν la distribution initiale du processus,

$$\nu(i) = Pr\{Y_0 = i\}.$$

Considérons $T_k \quad (k = 1, 2, ...)$ la variable aléatoire réelle qui donne l'instant d'absorption du processus par la classe récurrente ζ_k . Pour tout $n \geq 0$ nous avons,

$$\{T_k = n+1\} = \{Y_0 \in \Theta, ..., Y_n \in \Theta, Y_{n+1} \in \zeta_k\}$$

Donc,

$$Pr\{T_k = n+1\} = \sum_{i,j \in \Theta} \nu(i) P^{(n)}(i,j) P(j, \zeta_k) \tag{1.27}$$

pour $n \geq 0$, avec

$$P^{(0)}(i,j) = \delta_{i,j} \text{ et } P(j, \zeta_k) = \sum_{t \in \zeta_k} P(j,t).$$

Appliquons (1.19) et (1.20) à la matrice M . Pour tout $n \geq r$ nous avons,

$$P^{(n)}(i,j) = m_0(i,j)\rho(n,r) + m_1(i,j)\rho(n-1,r) + \cdots + m_{r-1}(i,j)\rho(n-r+1,r), \tag{1.28}$$

où

$$m_k(i,j) = a_{r-1}P^{(k)}(i,j) + a_{r-2}P^{(k+1)}(i,j) + ... + a_k P^{(r-1)}(i,j), \tag{1.29}$$

Pour $k = 0, 1, ..., r-1$. par substitution de (1.28) dans (1.27) nous obtenons l'expression suivante,

$$Pr\{T_k = n+1\} = \rho(n,r)\lambda_0^{(k)} + \rho(n-1,r)\lambda_1^{(k)} + ... + \rho(n-r+1,r)\lambda_{r-1}^{(k)}$$

où

$$\lambda_l^{(k)} = \sum_{i,j \in \Theta} \nu(i) m_l(i,j) P(j, \zeta_k).$$

Par conséquent, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.4.3. *([25]) Soit $T = inf\{T_k; k \geq 1\}$ la variable aléatoire qui donne l'instant d'absorption du processus par $\zeta = \bigcup_k \zeta_k$. Alors,*

$$Pr\{T_k = n+1\} = \rho(n,r)\lambda_0 + \rho(n-1,r)\lambda_1 + ... + \rho(n-r+1,r)\lambda_{r-1}$$

où

$$\lambda_l = \sum_{k \geq 1} \lambda_l^{(k)}.$$

De plus, comme il y a un nombre fini d états transitoires, la variable aléatoire réelle T est presque surement finie.

Chapitre 2

On the Fibonacci Markov chains

Sur les chaînes de Markov de type Fibonacci [1]

Abstract. We are concerned here with properties of the Markov chains associated to some finite order linear recursive sequences of nonnegative coefficients. The stochastic matrix formulation of these sequences permits to go thoroughly into their connection with the discrete parameter Markov chains theory. which give arise to some results of convergence. Moreover, we compute the generating function of the random variable defining the time of absorption of a stochastic process, of finite set of transient states, by a class of recurrent states.

Key Words : Generalized Fibonacci sequences, Césaro mean convergence, Markov chains, Stochastic process.

2000 Mathematical Subject Classifications : 40A05, 40A25 45M05

2.1 Introduction.

Linear recursive sequences $\{V_n\}_{n\geq 1}$ of order r are defined by specifying the initial values $V_1, \cdots, V_r$ and the recursive relation,

$$V_{n+1} = a_1 V_n + a_2 V_{n-1} + \cdots + a_r V_{n-r}, \quad \text{for} \ \ n \geq r-1, \tag{2.1}$$

where $a_1, a_2, \cdots, a_r \neq 0$ are the coefficients. The preceding sequences are currently called r-*generalized Fibonacci sequences* and they are extensively studied in the literature. To sequences (2.1) we associated their *characteristic polynomial* $P(x) = x^r - a_1 x^{r-1} - \cdots a_r$. The roots λ_j

1. Papier paru dans *Journal of Interdisciplinary Mathematics Vol. 11 Number 1 (2008), pp. 89-98*

$(1 \leq j \leq s)$ of this polynomial play a central role for (2.1), in particular the Binet formula of its general term is $V_n = \sum_{j=1}^{s}(\sum_{i=0}^{m_j-1} \beta_{ij} n^i)\lambda_j^n$, where m_j is the multiplicity of λ_j and the complex scalar β_{ij} are computed from the initial values $V_1, \cdots, V_r$ (see [8, 12] for example). Sequences (2.1) play a central role of many fields of mathematics and applied sciences. Particularly, in the recent papers [23, 24], the aforementioned sequences are connected up to the discrete Markov chains theory and its related stochastic process.

Indeed, sequences (2.1) can be written under the matrix equation,

$$X_{n+1} = AX_n \ , \quad \text{for} \ \ n \geq r-1, \tag{2.2}$$

where $X_{r-1} = ^t (V_r, \ \cdots, \ V_2, \ V_1)$ represents the matrix column of the initial values and A is the following companion matrix,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Matrix formulation (2.2)-(2.3) of sequences (2.1) has been considered in various papers (see [12, 16, 23, 24] for example). Yet in the case of nonnegative coefficients $a_1, ..., a_r$ satisfying the condition $a_1 + ... + a_r = 1$, it is immediate that A is a stochastic matrix. This observation has been of great importance in [23], since it bring out the authors to derive many important properties on sequences (2.1). More precisely, properties of the convergence of $\{A^n\}_{n\geq 0}$(the sequence of the powers of the stochastic matrix A) lead to important results of [23].

The main idea here is to go thoroughly into closed connection between sequences (2.1) and the Markov chains theory, using the Césaro mean convergence of the sequence $\{A^n\}_{n\geq 0}$. More precisely, the stochastic formulation (2.2)-(2.3) of sequences (2.1) allows us to make improvement upon this closed relationship initiated in [23], as matter of the fact we recover some important properties.

This paper is organized as follows. In section 2 we are interested in some properties of the Fibonacci Markov chains and the Césaro mean convergence of the sequence of stochastic matrix $\{A^n\}_{n\geq 0}$. Section 3 is devoted to some consequences on the convergence of sequences

(2.1). Finally, Section 4 concerns the study of the random variable of absorption of a Markov chains, whose space of states is finite (or countable) such that set of transient states is finite.

2.2 Fibonacci Markov chains and Césaro mean convergence

In this section we are concerned with sequences (2.1) of nonnegative coefficients $a_1, ..., a_r$ of sum 1. The companion matrix (2.3) represents a stochastic matrix, which is the transition matrix of a Markov chain whose spaces of states is $S_r = \{1, 2, \cdots, r\}$, called the *Fibonacci Markov chain*. Here the process go through the state 1 to the state i with the probability a_i $(i = 1, \cdots, r)$ and from the state i to the state $i-1$ $(i = 2, \cdots, r)$, with probability 1. It is clear that this Markov chain is irreducible. If we set $A^n = (a_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i,j \leq r}$, then $a_{i,j}^{(n)}$ represents the probability to go from the state i to the state j after n transitions.

Proposition 2.2.1. *(Césaro mean convergence) Let A be the companion matrix (2.3), where $a_1, ..., a_r$ are nonnegative of sum 1, and set $B_n = \dfrac{I_r + A + \cdots + A^n}{n}$ $(n \geq 1)$. Then, we have $B = \lim_{n \to +\infty} B_n = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq r}$, such that $b_{ij} = \dfrac{\rho(i,j)}{\mu_j}$, where $\rho(i,j)$ is the probability to reach the state j starting from i (here $\rho(i,j) = 1$ for every $i, j \in S$, since the Fibonacci Markov chain S is finite and irreducible) and μ_j is the the mean of random variable Z_j $(1 \leq j \leq r)$ which defines the first time to return to the state j starting from j.*

The next step consist in computing the mean μ_j of random variable Z_j $(i = 1, \cdots, r)$. Starting from j, the stochastic process associated to the Fibonacci Markov chain S reach the state 1 after $j-1$ transitions with probability 1. Set $S_j = \{1, \cdots, j-1\}$ $(j \geq 2)$; thus starting from the state 1 the process makes N_j returns to the state 1, by staying in S_j. Its clear that the random variable N_j has a geometric law of repartition of parameter $\lambda_j = a_1 + \cdots + a_{j-1}$, that is $Pr[N_j = k] = \lambda_j^k (a_j + ... + a_r)$ and $E(N_j) = \frac{a_1 + \cdots + a_{j-1}}{a_j + \cdots + a_r}$. During the k^{th} return to the state 1 $(k = 1, \cdots, N_j)$ the process realizes X_j transitions. During its stay in S_j the process makes $X_1 + X_2 + \cdots + X_{N_j}$ transitions. When the process go out from S_j, it realizes Y_j transitions to arrive to the state j, for the first time after its departure from j. Therefore, we have the result,

Proposition 2.2.2. *Under the preceding data we have,*

1. $Z_j = j - 1 + X_1 + \cdots + X_{N_j} + Y_j$ *and* $\mu_j = E(Z_j) = j - 1 + E(X_1 + \cdots + X_{N_j}) + E(Y_j)$.
2. *The random variable X_j are independent and have the same distribution. Furthermore,*

the X_j are independent from N_j with $Pr[X_j = k] = \frac{a_k}{a_1+\cdots+a_{j-1}}$, *and we have* $E(X_j) = \frac{\sum_{1\leq k\leq j-1} k a_k}{\sum_{1\leq k\leq j-1} a_k}$.

3. *The random variable Y_j takes the values* $1, 2\cdots, r-j+1$ *with* $Pr[Y_j = k] = \frac{a_{j+k-1}}{\sum_{j\leq k\leq r} a_k}$, *and we have* $E(Y_j) = \frac{a_j+2a_{j+1}+\cdots+(r-j+1)a_r}{\sum_{j\leq k\leq r} a_k}$.

Since the random variables X_j are i.i.d.(independent and identically distribute) and N_j, X_j are also independent, as the matter of the fact we have $E(X_1+\cdots+X_{N_j}) = E(N_j)E(X_1)$. Thus, a straightforward computation using Proposition 2.2.2 yields the following explicit formula of μ_j,

Proposition 2.2.3. *Under the preceding data we have,*

$$\mu_j = E(Z_j) = \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + r a_r}{\sum_{j\leq k\leq r} a_k}.$$

Expression (2.2) implies that $X_n = A^n X_0$, for every $n \geq 0$. Thereby, we can easily deduce that $\dfrac{X_0 + X_1 + \cdots + X_n}{n+1} = B_n X_0$, where $B_n = \dfrac{I_r + A + \cdots + A^n}{n}$. And Proposition 2.2.1 shows that the matrix sequence $\{B_n\}_{n\geq 1}$ converges or equivalently the matrix sequence $\{A^n\}_{n\geq 0}$ converges in the Césaro mean, we derive that the sequence (2.1) in the Césaro mean sense. And Proposition 2.2.3 allows us to have the following result.

Proposition 2.2.4. *Let $\{V_n\}_{n\geq 1}$ be a sequence (2.1) such that the coefficients a_j $(1 \leq j \leq r)$ are nonnegative with sum 1. Then, the sequence of mean $\{\frac{V_1+V_2+\cdots+V_n}{n}\}_{n\geq 1}$ is convergent with*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{n} = \frac{V_r}{\mu_1} + \frac{V_{r-1}}{\mu_2} + \cdots + \frac{V_1}{\mu_r}. \tag{2.4}$$

If we set $b_j = a_j + a_{j+1} + \cdots + a_r$, we show easily that (2.4) takes the simple form,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V_1 + V_2 + \cdots + V_n}{n} = \frac{b_1 V_r + b_2 V_{r-1} + \cdots + b_r V_1}{b_1 + b_2 + \cdots + b_r}. \tag{2.5}$$

Suppose that the coefficients a_j $(1 \leq j \leq r)$ of (2.1) are nonnegative with sum not necessary equals to 1. Set $W_n = \frac{V_n}{q^n}$ and $\alpha_j = \frac{a_j}{q^{j+1}}$, where q is the unique positive root of the characteristic polynomial $P(x)$ (see [12, 23, 26]). It's easy to verify that the sequence W_n satisfies also the recursive relation(2.1) with coefficients α_j. Since $\alpha_j \geq 0$ and $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = 1$, thus Proposition 2.2.4 leads to have the following corollary.

Corollary 2.2.5. *Under the preceding data, the sequence of mean $\{\frac{W_1+W_2+\cdots+W_n}{n}\}_{n\geq 1}$ is convergent with*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{n} = \frac{\beta_1 W_r + \beta_2 W_{r-1} + \cdots + \beta_r V_1}{d_1 + d_2 + \cdots + d_r}, \tag{2.6}$$

where $\beta_j = \alpha_j + \cdots + \alpha_r$.

Remark 2.2.6. *For nonnegative coefficients* a_j $(1 \leq j \leq r)$ *with sum 1, Proposition 2.2.4 illustrates that sequences (2.1) converges in the Césaro mean, but still the problem concerning the Césaro mean convergence for arbitrary coefficients.*

2.3 Fibonacci Markov chains and convergence

In general, the problem of convergence for a sequence (2.1), in the ordinary sense, has been the subject of many studies in the literature. In the case of nonnegative coefficients a_j $(1 \leq j \leq r)$ results on the convergence of sequences (2.1) has been established recently by various techniques in [8, 12, 23]. In the sequel of this section we display some properties of the Fibonacci Markov chains.

The sequence (2.1) is said to be convergent if V_n converges to finite limit when n goes to $+\infty$, for every choice of the initial values $V_1, \cdots, V_r$. In fact the expression of the limit of $\{V_n\}_{n\geq 1}$ depends on the initial values, meanwhile the property of convergence doesn't .The Binet formula of (2.1), shows that $\{V_n\}_{n\geq 1}$ converges if, and only if the roots of its characteristic polynomial $P(x)$ are of modulus < 1, and when $\lambda = 1$ it must be simple root (see [8]). On the other hands, (2.2) shown that $\{V_n\}_{n\geq 1}$ converges if, and only if the matrix sequence of powers $\{A^n\}_{n\geq 0}$ converges (see [23]).

Let consider now the problem of convergence for sequences (2.1), when the coefficients a_j $(1 \leq j \leq r)$ are nonnegative with sum 1. Thus, (2.3) is a stochastic matrix, whose space of states is $\mathcal{S}_r = \{1, \cdots, r\}$. For every integer $n \geq 1$, we set $A^n == (a_{i,j}^{(n)})_{1\leq i,j\leq r}$, where $a_{i,j}^{(n)}$ is the probability to go from the state i to the state j after n transitions. Starting from the state 1 the process can reach any other j of $\mathcal{S}_r$, by passing through the state r $(a_r \neq 0)$. Moreover, from the state j the process come back to 1 after j transitions with probability 1. Therefore the Fibonacci Markov chains $\mathcal{S}_r$ is irreducible (see [15, 17]). On the other hand, let $d_j = CGD\{n\ ;\ a_{j,j}^{(n} > 0\}$ be the period of a given state $j \in \mathcal{S}_r$, that the Markov chain $\mathcal{S}_r$ is irreducible and we conclude that all the states of $\mathcal{S}_r$ have the same period, that is $d = d_j$ for every state j $(1 \leq j \leq r)$ (see [15, 17]).

Let $a_{i_1},\ a_{i_2}, \cdots,\ a_{i_s}, a_r$ be the nonvanishing coefficients among $\{a_1, \cdots, a_r\}$. Hence, when the stochastic process, associated to $\mathcal{S}_r$, start from the state 1 it will reach first one of the state

i_k with probability $a_{i_k} > 0$ after 1 transition, and he will be back to the state 1 after $i_k - 1$ transitions with probability 1. Therefore, he realizes i_k transitions to come back to the state 1 with probability $a_{i_k} > 0$. And starting from the state 1, the process will be back to this state after crossing n_{i_1} times the state i_1, n_{i_2} times the state i_2, $\cdots$, n_{i_s} times the state i_s and n_r times the state r. In other words, for every $j = 1, \cdots, s$ the process realizes $n_{i_j} \times i_j$ transitions for crossing n_{i_j} times the state i_j and $n_r \times r$ transitions for crossing n_r times the state r. Thus, starting from the state 1 the process realizes $n_{i_1} \times i_1 + \cdots n_{i_s} \times i_s + n_r \times r$ transitions to come back to this state. We derive that $a_{1,1}^{(n)} > 0$ if, and only if, $n = n_{i_1} \times i_1 + \cdots n_{i_s} \times i_s + n_r \times r$. Since $d = CGD\{n;\ n = n_{i_1} \times i_1 + \cdots n_{i_s} \times i_s + n_r \times r\} = CGD\{i_1,\ i_2, \cdots, i_s, r\}$, we supply the proposition,

Proposition 2.3.1. *Let $\mathcal{S}_r$ be the Markov chain associated to the matrix (2.3), where the coefficients $a_1, ..., a_r$ are nonnegative of sum 1. Then, $\mathcal{S}_r$ is irreducible and the period d_i of every state i is given by $d_i = d = CGD\{n;\ n = n_{i_1} \times i_1 + \cdots n_{i_s} \times i_s + n_r \times r\}$; where $n_{i_j},\ n_r$ are integer $(1 \leq j \leq s)$. Moreover, we have $d = CGD\{i_1,\ i_2, \cdots, i_s, r\}$=$\{i;\ a_i > 0\}$ and $r = d \times s$.*

Assertions of Proposition 2.3.1 implies that the state space of the Fibonacci Markov chain $\mathcal{S}_r$ associated to the matrix (2.3), can be decomposed as an union of d disjoint cyclic classes. More precisely, we have $\mathcal{S}_r = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \mathcal{C}_d$, where the cyclic $\mathcal{C}_j$ $(1 \leq j \leq d)$ satisfy $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset$ for $i \neq j$. If the system is in a cyclic class $\mathcal{C}_j$ at the time $t = n$, then at $t = n + 1$ it get into the class $\mathcal{C}_{j+1}$ $(mod(d))$ in one transition with probability 1 (see [17, 15] for example). The preceding discussion bring out to have,

Proposition 2.3.2. *Under the preceding data, the matrix sequence $\{A^n\}_{n\geq 0}$ owns d convergent subsequences $\{A^{nd+p}\}_{n\geq 0}$ $(0 \leq p \leq d-1)$ satisfied $\lim_{n\to+\infty} A^{nd+p} = B_p = (b_{i,j}^{(p)})_{1\leq i,j\leq r}$ with $b_{i,j}^{(p)} = d \times \Pi_j$ for $i \in \mathcal{C}_l$, $j \in \mathcal{C}_{l+p}$ $(l$+$p mod\ d)$ and $b^{(p)}(i,j) = 0$ otherwise, the vector columns $\Pi =^t (\Pi_1, \cdots, \Pi_s)$ is the unique stationary distribution solution of the equation $\Pi = \Pi \times A$, and we have $\Pi_j = \frac{b_j}{b_1+b_2+\cdots+b_r}$, where $b_j = a_j + \cdots + a_r$.*

Consequently, we arrive to get the following result on the convergence of sequences (2.1),

Corollary 2.3.3. *Let $\{V_n\}_{n\geq 1}$ be a sequence (2.1), whose coefficients $a_1, \cdots, a_r$ are nonnegative of sum 1 with $d = CGD\{j,\ a_j > 0\} > 1$. Then, this sequence owns d convergent subsequences $\{V_{nd+p}\}_{n\geq 1}$ $(1 \leq p \leq d)$, with $L_p = \lim_{n\to+\infty} V_{nd+p} = \sum_{k=1}^{s} d\Pi_{kd-p-1} V_{r-kd+p}$, where $\Pi_j = \frac{b_j}{b_1+b_2+\cdots+b_r}$ $(b_j = a_j + \cdots + a_r)$. Further, the sequence (2.1) converges if, and only if, the* *condition* $d = CGD\{j,\ a_j > 0\} = 1$ *is satisfied, and in this case we have* $L = \lim_{n\to+\infty} V_n = \sum_{k=1}^{s} \Pi_k V_{r+1-k}$.

Proposition 2.3.2 and Corollary 2.3.3 has been expressed under an other form in [23] . Similarly to [23], we can explore also the case when the nonnegative coefficients $a_1, \cdots, a_r$ are not of sum necessary equals to 1. Indeed, we rely on the auxiliary sequence $\{W_n\}_{n\geq 1}$ defined by $W_n = \frac{V_n}{q^n}$, of coefficients $\alpha_j = \frac{a_j}{q^{j+1}}$, where $q > 0$ is the unique positive root of the characteristic polynomial $P(x)$ (see [12, 23, 26]). It turns out that $\{W_n\}_{n\geq 1}$ is a sequence (2.1) and $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r = 1$.

Corollary 2.3.4. *Under the preceding data, the sequence* $\{W_n\}_{n\geq 1}$ *owns* d *convergent to subsequences* $\{W_{nd+p}\}_{n\geq 1}$ $(1 \leq p \leq d)$*, with* $L_p = \lim_{n\to+\infty} W_{nd+p} = \sum_{k=1}^{s} d\Pi'_{kd-p-1} W_{r-kd+p}$*, where* $\Pi'_j = \frac{\beta_j}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r}$ $(\beta_j = \alpha_j + \cdots + \alpha_r)$*. Moreover, the sequence* $\{W_n\}_{n\geq 1}$ *converges if, and only if, the condition* $d = CGD\{j,\ a_j > 0\} = 1$ *is satisfied, and in this case we have* $L = \lim_{n\to+\infty} W_n = \sum_{k=1}^{r} \Pi'_k W_{r+1-k} = \frac{\beta_1 V_1 + \cdots + \beta_r V_r}{\beta_1 + \cdots + \beta_r}$.

One of fallout of Corollaries 2.3.3 and 2.3.4 is to provide a practical formulation of the results given in Theorem 4.2 and 4.3 of [23].

2.4 Sequence 2.1 and random variable of absorption

Let $\Gamma = \{1,\ 2\ ,3\ \cdots\}$ (finite or countable)be the state space of a Markov chains and $P = (P_{i,j})_{i,j\in\Gamma}$ its associaded transition matrix. Suppose that $\Theta = \{1,\ \cdots\ ,\ r\}$ is the set of transient states and consider the square matrix $M = (P_{i,j})_{i,j\in\Theta}$. Let $(\mathcal{C}_k)_{k\geq 1}$ be the famiy of recurrent classes of the preceding Markov chain and set $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{C}_k$. Denoting by T_k the random variable defining the time of absorption of the process by the class $\mathcal{C}_k$ and $T = Inf\{T_j\ \ ; j \geq 1\}$ the random variable defining the time of absorption of the process by $\mathcal{C}$. If ν is the initial distribution of the process, then we have

$$Pr[T_k = n+1] = \sum_{i,j\in\Theta} \nu(i) p^{(n)}(i,j) p(j,\mathcal{C}_k) \tag{2.7}$$

and

$$Pr[T = n+1] = \sum_{i,j\in\Theta} \nu(i) p^{(n)}(i,j) p(j,\mathcal{C}), \tag{2.8}$$

where $M^n = (p^{(n)}(i,j))_{(i,j)\in\Theta}$ and $p(j,\mathcal{C}_k) = \sum_{l\in\mathcal{C}_k} p(j,l)$. The aim here below is to describe the law of the random variable T by computing explicitly its generating function .

Let $Q(z) = z^r - a_1 z^{r-1} - \cdots - a_r$ be the caracteristic polynomial of the matrix M and set $W_0 = I_r$ (the identity matrix of order r), $W_k = M^k - a_1 M^{k-1} - \cdots - a_r I_r$ $(k = 1, 2, \cdots, r-2)$. We can verify easily that $MW_k = W_{k+1} + a_k I_r$ and $MW_{r-1} = a_r I_r$. And by a straightforward computation we establish that the powers of M satisfy the recursive relation,

$$\begin{aligned} M^n &= u_n W_0 + u_{n-1} W_1 + \cdots + u_{n-r+1} W_r \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{r-1} u_{n-k} W_k \end{aligned} \tag{2.9}$$

where

$$u_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+rk_r=n-r} \frac{(k_1+k_2+\cdots+k_r)!}{k_1!k_2!\cdots k_r!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_r^{k_r} \quad for \quad n \geq 1, \tag{2.10}$$

with $u_0 = 1$ and $u_{-j} = 0$ for $1 \leq j \leq r-1$ (see [25] for example).

Mention for instance, that $(u_n)_{n\geq 0}$ is a sequence (2.1) (see [19, 24, 25] for example). Thereby, substitution of (2.9) in (2.7) permits to obtain,

$$Pr[T_k = n+1] = \sum_{i,j\in\Theta} \nu(i)(\sum_{l=0}^{r-1} u_{n-l} W_l(i,j) p(j, \mathcal{C}_k)) = \sum_{s=0}^{r-1} u_{n-s} \gamma_{s,k} \tag{2.11}$$

such that $\gamma_{s,k} = \sum_{i,j\in\Theta} \nu(i) W_s(i,j) p(j, \mathcal{C}_k)$. Thus (2.8) takes the form,

$$Pr[T_k = n+1] = \sum_{i,j\in\Theta} \nu(i)(\sum_{s=0}^{r-1} u_{n-s} W_s(i,j) p(j, \mathcal{C})) = \sum_{s=0}^{r-1} u_{n-s} \gamma_s$$

where

$$\gamma_l = \sum_{i,j\in\Theta} \nu(i) W_l(i,j) p(j, \mathcal{C}) = \sum_k \gamma_{l,k} \tag{2.12}$$

Since the sequence $(u_n)_{n\geq r-1}$ satisfies (2.1), it is well known that its ordinary generating function is $\sum_{n\geq 0} u_n z^n = \frac{1}{1-a_1 z - a_2 z^2 - \cdots - a_r z^r}$ ([19, 23, 24] for example). Consequently, the generating function of random variable T can be written under the form,

$$\begin{aligned} \varphi_T(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} Pr[T = n+1] z^{n+1} \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{r-1} \gamma_l \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n-l} z^{n+1} \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{r-1} \gamma_l \sum_{n=l}^{+\infty} u_{n-l} z^{n+1}. \end{aligned}$$

And permutation of the summation in this latter formula, allows us to have the proposition,

Proposition 2.4.1. *Let $\mathcal{S}$ be a Markov chains whose space of states is Γ is finite or countable. Suppose that $\Theta = \{1, \cdots, r\}$ is the set of transient states of and $(\mathcal{C}_k)_{k\geq} 0$ are the classes of* *recurrent states. Let* $T = \inf\{T_j\ j \geq 1\}$ *be the random variable defining the time of absorption of the process by* $\mathcal{C}$. *Then, the generating function of* T *is*

$$\varphi_T(z) = \frac{\sum_{s=0}^{r-1} \gamma_s z^{s+1}}{1 - a_1 z - a_2 z^2 - \cdots - a_r z^{s+1}}.$$

where γ_s $(0 \leq s \leq r-1)$ *are given by (2.12).*

Remark 2.4.2. *For nonnegative coefficients of sum 1, the Fibonnacci Markov chain* $\{1, \cdots, r\}$ *associated to the stochastic matrix (2.3), can be also viewed as the class of absorbing states of the set* $\Gamma = \{1, \cdots, r\}$. *More precisely,* Γ *may represents a Markov chain related to a specific stochastic matrix of infinite order* $P = (p(i,j))_{i,j\geq 0}$ *(see ([24]) for more details). And the Césaro mean convergence of the sequence of matrix* $(Q_n)_{n\geq 1}$, *where* $Q_n = \frac{P+P^2+\cdots+P^n}{n}$, *leads to the combinatoric formula of sequences (2.1). Furthermore , for* $n \geq r+1$ *expression (2.10) is nothing else but the sequence* $H^r_{n-r+1}(a_1, a_2, \cdots, a_r)$*of multivariate polynomials of order* r *of Phippou (see ([1, 27]).*

Acknowledgements. The authors would like to express their sincere thanks to professor Rajae Ben Taher for helpful suggestions and fruitful discussions.

Deuxième partie

Opérateurs Analytiques.

Chapitre 1

Préliminaires.

Soient X un espace de Banach, séparable de dimension infinie, $\mathcal{L}(X)$ est l'algèbre des opérateurs linéaires continus de X dans lui même et X^* le dual de X. Pour $T \in \mathcal{L}(X)$, on notera par T^*, $cl(F)$, l'opérateur adjoint de T, et la fermeture de F respectivement.

Le spectre $\sigma(T)$ d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est défini comme suit

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \ \ \textit{n'est pas inversible}\}.$$

C'est un compact de $\mathbb{C}$ contenu dans la boule $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \parallel T \parallel \ \}$.

Le rayon spectral $r(T)$ d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$ est défini par

$$r(T) = \sup\{|\lambda| \ : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

et nous avons

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \parallel T^n \parallel^{\frac{1}{n}}$$

Il y a différent manière pour que l'opérateur T ne soit pas inversible. Ceci nous permet de classifier les points du spectre dans divers type.

— $\sigma_p(T)$ le spectre ponctuel, est l'ensemble des valeurs propres de T.

— $\sigma_c(T)$ le spectre continu, est l'ensemble :

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T); T - \lambda I \ \textit{est injective à image dense}\}$$

— $\sigma_r(T)$ le spectre résiduel, est l'ensemble :

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \sigma(T); T - \lambda I \ \textit{est injective à image non dense}\}$$

Alors on a :

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T).$$

Le spectre de T s'écrit :

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_r(T).$$

où $\sigma_{ap}(T)$ est le spectre approximatif de T,

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas borné inférieurement}\}.$$

Remarque 1.0.3. *On dit que $T \in \mathcal{L}(X)$ est borné inférieurement si* $\inf_{\|x\|=1}(\| Tx \|) > 0$.

Proposition 1.0.4. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$*

1 $\lambda \in \sigma_{ap}(T) \Longleftrightarrow$ il existe une suite (x_n) telles que $\|x_n\| = 1$ et

$$\lim_{n\to\infty} \|(T - \lambda I)x_n\| = 0.$$

2 $\sigma_{ap}(T)$ est un sous ensemble non vide fermé de $\sigma(T)$

3 Le bord de $\sigma(T)$ $(\partial\sigma(T))$ est contenu dans $\sigma_{ap}(T)$.

Nous notons par $N(T), R(T)$ le noyau respectivement l'image de T.

Par la suite, nous conviendrons les notations suivantes :

— $\{T\}' = \{S \in \mathcal{L}(X) : ST = TS\}$, le commutant de T.
— $\mathcal{F}(X)$,, l'ensemble des opérateurs de rang fini sur X.
— $\mathcal{K}(X)$, l'ensemble des opérateurs compacts sur X.
— q$\mathcal{N}(X)$, l'ensemble des opérateurs quasi-nilpotents sur X.
— $\mathcal{P}(X) = \{S \in \mathcal{L}(X) : \exists P \quad \text{polynôme tel que} P(S) = 0\}$, l'ensemble des opérateurs algébriques.

Définition 1.0.5. *1-Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, T est normal si $TT^* = T^*T$.*
2-Soit $S \in \mathcal{L}(X)$, S est sous normal s'il admet une extension d' un opérateur normal.
*3- Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, un opérateur sous normal, T est **pur** s'il n'existe aucun sous espace $\mathcal{K}$ non trivial pour T et T^* tel que $T|_{\mathcal{K}}$ soit normal.*

Nous allons assez souvent dans nos exemples utiliser le Shift unilatéral à poids. C'est la raison pour laquelle , nous donnons une étude détaillée du spectre de l'adjoint de ce dernier.

1.1 Les opérateurs Shift à poids

Un opérateur T défini sur un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}$ est appelé shift unilatéral à poids strictement positifs $w = (w_n)_{n\geq 0}$ si,

$$Te_n = w_n e_{n+1}.$$

Où $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}$.

Remarque 1.1.1. *L'opérateur shift T est borné si, et seulement si la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est bornée.*

Proposition 1.1.2. *Soit T shift unilatéral alors son adjoint T^* est défini par :*

$$T^*e_n = w_{n-1}e_{n-1} \ \ si\, n \geq 1$$
$$T^*e_0 = 0.$$

1.1.1 Spectre du shift à poids

Théorème 1.1.3. *[14]*

- *1) $\sigma_p(T) = \emptyset$.*
- *2) On a $0 \in \sigma_p(T^*)$. Si $r_2(T) = \liminf_{n\to+\infty} \beta_n^{\frac{1}{n}} = 0$. avec $\beta_n = w_0 w_1 ....w_{n-1}; \quad \beta_0 = 1$. et $r_2(T) \neq 0$ alors*

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r_2(T)\} \quad \subset \sigma_p(T^*) \quad \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_2(T)\} \tag{1.1}$$

Preuve :

- 1) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x = \sum_{n\geq 0} a_n e_n \in \mathcal{H}$ tel que $Tx = \lambda x$. Alors

$$\lambda a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_n w_n = \lambda a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

  Comme T est injective, $\lambda \neq 0$. Par conséquent $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $x = 0$. Donc $\sigma_p(T)$ est vide.
- 2)L'adjoint T^* de T est défini par :

$$\begin{cases} T^*e_n = & w_{n-1}e_{n-1}, \\ T^*e_0 = & 0. \end{cases}$$

  donc $0 \in \sigma_p(T^*)$. D'un autre coté, soit $\lambda \in \sigma_p(T^*)$, $x = \sum_{n\geq 0} a_n e_n \in \mathcal{H}$ vecteur propre associé. Alors $T^*x = \lambda x$ implique $\lambda a_n = w_n a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_n = \frac{a_0 \lambda^* n}{\beta_n}$ pour tout $n \geq 1$ où $\beta_n = w_0 w_1 ....w_{n-1}; \quad \beta_0 = 1$..

Par conséquent $a_0 \neq 0$, $x = a_0(e_0 + \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^n}{\beta_n} e_n)$ or

$$\|x\|^2 = |a_0|^2 (1 + \sum_{n\geq 1} \frac{|\lambda|^{2n}}{\beta_n^2}). \tag{1.2}$$

$x \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{|\lambda|^{2n}}{\beta_n^2})$ est convergente et par suite

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r_2(T)\} \subset \sigma_p(T^*) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r_2(T)\}.$$

□

1.1.2 Les points d'évaluation bornés pour un opérateur cyclique

Étant donné E un un sous-ensemble de X, nous notons par $span\{E\}$, le plus petit sous espace fermé contenant E et par $Vect_T(E)$, le plus petit sous-espace fermé invariant par T et contenant E.

Nous rappelons qu'un opérateur T est cyclique s'il existe $x \in X$ (appelée vecteur cyclique pour T) tel que $X = Vect_T(\{x\}) = span\{T^n x, n \geq 0\}$.

Le concept des points d'évaluations pour un espace de Banach de fonctions est défini naturellement, de la manière suivante. Soit X un espace de fonctions définies sur une certaine région Ω, un nombre complexe $\lambda \in \Omega$ est dit point d'évaluation borné (respectivement point d'évaluation analytique borné) si l'application φ_λ définie par $\varphi_\lambda = f(\lambda)$ pour tout $f \in X$ est continue (respectivement l'application $\mu \longrightarrow \varphi_\mu$, est analytique au voisinage de λ.)

Cette notion a été prolongée pour les opérateurs cycliques sur des espaces de Banach arbitraires par L.Williams dans [16] comme suit : soient T un opérateur cyclique sur un espace de Banach X , de vecteur cyclique $x \in X$ et λ un nombre complexe est un point d'évaluation borné pour T s'il existe $M > 0$ tel que :

$$|P(\lambda)| \leq M\|P(T)x\| \tag{1.3}$$

pour tout polynômes P. Nous notons $\mathcal{B}(T)$ l'ensemble des points d'évaluations bornés de T. L'équation (1.3) implique que l'application : $P(T)x \in X \to P(\lambda) \in \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction $\varphi_\lambda \lambda$ linéaire continue sur X alors $\varphi_\lambda \in X^*$. Par conséquent il existe un unique $k(\lambda) \in X^*$ tel que $P(\lambda) =< P(T)x, k(\lambda) >$ pour tout polynôme P.

Nous avons donc $0 =< (T-\lambda)P(T)x, k(\lambda) >=< P(T)x, (T-\lambda)^* k(\lambda) >$ pour tout polynôme P et $< x, k(\lambda) >= 1$. En particulier $k(\lambda) \in N(T-\lambda)^*$. Comme T est cyclique, il est facile de voir que $\dim N(T-\lambda)^* \leq 1$ pour tout nombre complexe λ.

D'autre part si $k(\lambda) \in N(T-\lambda)^*$ est un vecteur propre associé à λ, alors $P(T)^*k(\lambda) = P(\lambda)k(\lambda)$, et $P(\lambda) =< x, P(\lambda)k(\lambda) >=< x, P(T)^*k(\lambda >=< P(T)x, k(\lambda) >$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a (1.3) donc $\lambda \in \mathcal{B}(T)$. Ainsi

$$B(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash \dim N(T-\lambda)^* = 1\}. \tag{1.4}$$

Nous venons donc de prouver que :

Proposition 1.1.4. *T opérateur cyclique alors $B(T) = \sigma_p(T^*)$.*

Un nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ est un point d'évaluation analytique borné si $\lambda \in int(\mathcal{B}(T))$ (intérieur de $\mathcal{B}(T)$) et si pour tout $y \in X$, l'application $\widehat{y} : z \rightarrow < y, k(z) >$ est analytique en λ. Où $k(\lambda)$ est l'unique vecteur dans $N(T-\lambda)^*$ tel que $< x, k(\lambda) >= 1$.

Nous notons par $\mathcal{B}_a(T)$ l'ensemble de points analytiques bornés de T.

Des propriétés classiques de $\mathcal{B}(T)$ et $\mathcal{B}_a(T)$ qu'on utilisera dans ce chapitre sont données par la proposition suivante :

Proposition 1.1.5. *Soit T un opérateur cyclique alors*

— *1) $\mathcal{B}_a(T) \subset int(\mathcal{B}(T)) \subset \overline{\mathcal{B}_a(T)}$.*

— *2) $\mathcal{B}_a(T)$ est simplement connexe.*

1.1.3 Les points d'évaluations bornés pour un opérateur multicyclique

On dira que T est un opérateur multicyclique d'ordre n (**n-** multicyclique) s'il existe n vecteurs $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tel que $X = Span\{T^m x_i, m \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$ et si pour tout $n-1$ vecteurs $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in X$ on a $Span\{T^m y_i; m \geq 0; 1 \leq i \leq n-1\} \neq X$. Le **n-**uplet $x_1, x_2, ..., x_n$ est appelé le **n-**uplet cyclique de T. On notera par $\mathcal{C}_n(X)$ ensemble de tout les opérateurs **n-**multicyclique sur X, et pour $T \in \mathcal{C}_n(X)$, l'ensemble de tout les n-uplet cycliques de T est note $\mathcal{C}_n(T)$.

Points d'évaluations : Pour T un opérateur **n-**multicyclique sur X, soit $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{C}_n(T)$ on dira que $\lambda \in \sigma(T)$ est appelé point d'évaluation de T s' il existe $M > 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |P_i(\lambda)| \leq M || \sum_{i=1}^{n} P_i(T)x_i || \tag{1.5}$$

Pour toute famille de polynôme complexe $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$. on notera par $\mathcal{B}^n(T)$ l'ensemble des points d'évaluation de T.

Pour $\lambda \in \mathcal{B}^n(T)$ et $j \in \{1, ..., n\}$, on a :

$$|P_j(\lambda)| \leq M||\sum_{i=1}^{n} P_i(T)x_i|| \tag{1.6}$$

La fonctionnelle $w^j(\lambda)$ est définie comme suit :

$$\begin{array}{rlcl} w^j(\lambda) : & \{\sum_{i=1}^{n} P_i(T)(x_i); P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\} & \mapsto & \mathbb{C} \\ & \sum_{i=1}^{n} P_i(T)(x_i) & \mapsto & P_j(\lambda) \end{array}$$

est linéaire continue ($\mathcal{P}$ ensemble des polynômes complexes). Comme $\{\sum_{i=1}^{n} P_i(T)(x_i); P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$ est dense dans X, on peut prolonger l' application $w^j(\lambda)$ est une forme linéaire sur X.

Il existe un unique $k_j(\lambda) \in X^*$ tel que :

$$w^j(\lambda)(\sum_{i=1}^{n} P_i(T)(x_i)) =< \sum_{i=1}^{n} P_i(T)(x_i), k_j(\lambda) >= P_j(\lambda) \qquad \text{pour tout } P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}. \tag{1.7}$$

En particulier ,

$$k_j(\lambda) \in N(T - \lambda)^* \qquad \text{et } < x_i, k_j(\lambda) >= \delta_{ij} \tag{1.8}$$

Réciproquement, si $k_1, k_2, ...k_n \in N(T - \lambda)^*$ satisfont l'équation (1.7) alors en appliquant l' inégalité de Cauchy, on a pour tout $P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}$ et $j \in \{1, 2, ..., n\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} |P_j(\lambda)| = \sum_{j=1}^{n} | < \sum^{i=n_1} P_i(T)(x_i), k_j(\lambda) > | \leq (n \sup_j \|k_j\|)\| \sum_{i=1}^{n} P_i(T)(x_i)\| \tag{1.9}$$

on aboutit à $\lambda \in \mathcal{B}^n(T)$ et $N(T - \lambda)^* = \text{span}\{k_j(\lambda); j = 1, 2, ..., n\}$.

Les résultats suivants seront utiles par la suite.

Proposition 1.1.6. *Soit $T \in \mathcal{C}_n(X)$ un opérateur **n**-multicyclique et $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{C}_n(T)$ un **n**-uplet associé. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :*

(i) $cl(R(T - \lambda)) + span\{x_1, x_2, ..., x_n\} = X$

(ii) $dim N(T - \lambda)^* \leq n$

Preuve :

(i) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, comme $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{C}_n(T)$, on a :

$$\begin{aligned} cl(R(T - \lambda)) + Span\{x_1, x_2, ..., x_n\} &= cl((T - \lambda)(X) + span\{x_1, x_2, ..., x_n\} \\ &\supset Span\{(T - \lambda)^k x_i; k \geq 1, 1 \leq i \leq n\} + Span\{x_1, x_2, ..., x_n\} \\ &\supset Span\{T^k x_i; k \geq 0, 1 \leq i \leq n\} = X \end{aligned}$$

La dernière inclusion est justifiée par le fait :

$$T^k x_i = (T^k - \lambda^k)x_i + \lambda^k x_i \in Span\{R(T-\lambda), x_i\}.$$

(ii) On a :

$$codim\ [cl(R(T-\lambda)] = dim N(T-\lambda)^*$$

et d'après (i) , $dim(N(T-\lambda) \leq n$.

Remarque 1.1.7. *Dans le cas d'un opérateur cyclique on a $\mathcal{B}(T) = \sigma_p(T^*)$ qui fait défaut dans le cas d'un opérateur **n**-cyclique $n \geq 2$.*

Exemple 1. *Soit S l' opérateur shift défini dans l'espace de Hardy H^2 et $X = H^2 \bigoplus H^2$ on considère l'opérateur $T = S \oplus 2S$, alors l'opérateur T est **2-** cyclique : en effet pour tout $\lambda \in D(0,1)$ on a $dim N(T-\lambda)^* = 2$ et $X = Span\{T^m(e_0, 0), T^n(0, e_0);\ m, n \geq 0\}$ où $(e_n)_{(n \geq 0)}$ est une base orthonomée de H^2. On a $\mathcal{B}^2(T) = D(0,1)$ et $\sigma_p(T^*) = D(0,2)$ donc $\mathcal{B}^2(T) \neq \sigma_p(T^*)$*

La caractérisation algébrique de $\mathcal{B}^n(T)$dans le cas d'un opérateur multicyclique est donnée par :

Théorème 1.1.8. *Soit T un opérateur **n**-multicyclique défini sur un espace de Banach X . Alors on a :*

$$\mathcal{B}^n(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \dim N(T - \lambda I)^* = n\}$$

Pour la démonstration du Théorème 1.1.8, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.1.9. *Soit $T \in \mathcal{C}_n(X)$ un opérateur **n**-multicyclique sur X,$(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{C}_n(T)$ et $k_1, k_2, ..., k_n \in N(T-\lambda)^*$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$k_1, k_2, ..., k_n$ sont des vecteurs linéairement indépendant sur X^**
2. *$det(< x_i, k_j >_{ij}) \neq 0$*

En particulier ,

$$k_1, k_2, ..., k_n \text{ est une base de } N(T-\lambda)^* \Leftrightarrow det(< x_i, k_j >_{ij}) \neq 0.$$

Preuve 1. implique 2. soient $k_1, k_2, ..., k_n$ des vecteurs linéairement indépendant dans X^*, supposons qu'il existe λ_0 tel que $det(< x_i, k_j(\lambda_0) >) = 0$ ceci implique que les vecteurs lignes ou vecteurs colonnes de la matrice $(< x_i, k_j >_{ij})$ sont liés, on peut supposer par exemple que $< x_i, k_{j_0}(\lambda_0) > = 0\ \ \forall 1 \leq i \leq n$ et j_0 fixé. On aura $< \sum_{1 \leq i \leq n} P_i(T)(x_i), k_{j_0}(\lambda_0) >= 0$, comme

$\{\sum_{i=1}^{n} P_i(T)(x_i); P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$ est dense dans X, donne $k_{j_0}(\lambda_0) = 0$ ce qui est impossible .

2. implique 1. évidente .□

Preuve du théoréme 1.1.8. Soit $\lambda \in \mathcal{B}^n(T)$ et $(k_i(\lambda))_{1\leq i\leq n}$ base de $N(T-\lambda)^*$. Pour $y \in N(T-\lambda)^*$, $y = \sum_{i=n}^{n} \alpha_i k_i(\lambda) \in N(T-\lambda)^*$ avec $\alpha_i =< y, k_i >$.

Réciproquement soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $N(T-\lambda)^* = Span\{k_1, k_2, ..., k_n\}$ est de dimension **n** . D' après le Lemme 1.1.9 on a, la matrice $(< x_i, k_j >_{i,j})$ est inversible . Soit $(a_{ij})_{i,j})$ son inverse , soit $h_j(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} k_i \ \ (\forall 1 \leq j \leq n)$, alors $\{h_1, h_2, ..., h_n\} \in N(T-\lambda)^*$ vérifiant $< x_i, h_j >= \delta_{ij}$. Ceci implique que $\lambda \in \mathcal{B}^n(T)$. □

Définition 1.1.10. $\lambda \in \mathbb{C}$ *est un point d'évaluation analytique de* T *si* $\lambda \in int(\mathcal{B}^n(T))$*(l'intérieur de* $\mathcal{B}^n(T)$*) et si pour tout* $y \in X$*, l'application* $\widehat{y_j} : z \mapsto < y, k_j(z) >$ *est analytique en* λ *pour tout* $j = 1, ...n$*. L'ensemble des points d'évaluation analytique de* T *sera note* $\mathcal{B}_a^n(T)$*.*

Proposition 1.1.11. *Soit* $T \in \mathcal{C}_n(X)$ *et* O *un ensemble ouvert contenue dans* $\mathcal{B}^n(T)$*. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $O \subset \mathcal{B}_a^n(T)$*.*
2. *L'application* $\lambda \mapsto k_i(\lambda)$ *est continue sur* O $\forall(1 \leq i \leq n)$
3. *L'application* $\lambda \mapsto \|k_i(\lambda)\|$ *est bornée sur tout compact contenue dans* O

Preuve :1. implique 2. on suppose que O est ensemble analytique pour T pour tout $y \in X$ la fonction $\widehat{y}$ est analytique sur O, c'est à dire que la fonction $(\lambda \in O \mapsto k_i(\lambda) \in X^*)$ est analytique , donc $\lambda \mapsto k_i(\lambda)$ est continue $(\forall 1 \leq i \leq n)$.

2. implique 3. est évidente .

3. implique 1. On suppose que la fonction $\lambda \mapsto k_i(\lambda)$ est bornée sur tout compact contenue dans O $\forall(1 \leq i \leq n)$. Soit $y \in X = Span\{\sum_{i=1}^{i=n} P_i(T)x_i, P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$, alors il existe une suite $(P_i^m)_m \subset \mathcal{P}$ telle que $\lim_{m\to\infty} \| \sum_{i=1}^{i=n} P_i^m(T)x_i - y\| = 0$. On a alors pour tout compact K contenue dans O :

$$\begin{aligned} | < \sum_{i=1}^{n} P_i^m(T)x_i - y, k_j(\lambda) > | \ &= | < \sum_{i=1}^{n} P_i^m(T)x_i, k_j(\lambda) > - \widehat{y}| \\ &= |P_j^m(\lambda) - \widehat{y}_j| \qquad \text{car } < x_i, k_j >= \delta_{ij} \ \forall \ (1 \leq i, j \leq n) \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$sup_{\lambda\in K}|P_j^m(\lambda) - \widehat{y}_j| \leq sup_{\lambda\in K}\|k_j(\lambda)\| \ \ \| \sum_{i=1}^{i=n} P_i^m(T)x_i - y\|$$

Donc la fonction $\lambda \mapsto \widehat{y}(\lambda)$ est analytique sur O . $\square$

Et d' après le Théorème 1.1.8 et le Lemme 1.1.9, on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.12. *$\mathcal{B}^n(T)$ ne dépend pas du choix du* ***n****-uplet cyclique*

Preuve : Soit $(y_1, y_2, ..., y_n)$ **n-**uplet cyclique associé à T alors pour tout $\lambda \in \mathcal{B}^n(T)$, il existe une famille unique $h_1, h_2, ..., h_n \in N(T-\lambda)^*$ définie sur $\mathcal{B}(T)$ linéairement indépendant vérifiant pour tout $\lambda \in \mathcal{B}^n(T)$, $< y_j, h_i >= \ \delta_{ij} \ \forall (1 \leq i, j \leq n)$. On a :

$$< \sum_{i=1}^{n} P_i(T)(x_i), k_j(\lambda) >=< \sum_{i=1}^{n} P_i(T)(y_i), h_j(\lambda) >= P_j(\lambda) \qquad \text{pour tout } P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}. \tag{1.10}$$

Comme $N(T-\lambda)^* = Span\{k_1, k_2, ..., k_n\}$, on a pour tout $\lambda \in \mathcal{B}(T)$ $\ h_j(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(\lambda) k_i(\lambda)$ avec $(a_{ij}(\lambda))_(1 \leq i, j \leq n) = (< x_i, h_j(\lambda) >)_(1 \leq i, j \leq n)$ qui est une matrice inversible d' après le lemme 1.1.9. Soit $(b_{ij})_{1 \leq \ i,j \leq n}$ son inverse, on suppose que O est un ensemble analytique pour T par rapport au **n-**uplet cyclique $(x_1, x_2, ..., x_n)$ on a alors :

$$\widehat{y_i} =< y_i, k_j(\lambda) >=< y_i, \sum_{l=,1}^{n} b_{lj}(\lambda) k_l(\lambda) >= b_{ij}(\lambda)$$

On déduit que la fonction $\lambda \mapsto b_{ij}(\lambda)$ est continue sur O, il est de même que la fonction $\lambda \mapsto a_{ij}(\lambda)$, ce qui entraîne que la fonction $\lambda \mapsto \|h_j\|(\lambda)$ est bornée sur tout compact contenue dans O $(\forall 1 \leq j \leq n)$. Et d'aprés la proposition (1.1.11), O est un ensemble analytique pour T associé au **n-**uplet $(y_1, y_2, ..., y_n)$. Par symétrie , on conclut que $\mathcal{B}_a(T)$ ne dépend pas du **n**-uplet cyclique .

Chapitre 2

Étude des Opérateurs Analytiques

2.1 Cas Cyclique

2.1.1 Le commutant d'un opérateur analytique.

Notre but est d'étudier le comportement des opérateurs cycliques dont les adjoints ont un ensemble riche de vecteurs propres.

L'intérêt de cette partie est de caractériser les opérateurs analytiques dans le cas cycliques. En particulier, on caractérise leur commutant. Ce qui nous permet de déduire beaucoup de résultats sur la description spectrale des opérateurs analytiques et de retrouver certaine classe d'opérateur souvent étudier dans la littérature (Shift abstrait). Et d'étendre quand c 'est possible les résultats aux cas des opérateurs multicycliques.

Définition 2.1.1. *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur cyclique. On dit que T est analytique si $span\{k(\lambda), \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\} = X^*$.*

Les exemples d'opérateurs analytiques sont nombreux dans la littérature, nous donnons certains d'entre eux.

Exemples. — *1) Soit $T = S_w$ shift unilatéral à poids strictement positifs $w = (w_n)_{n\geq 0}$ défini sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, par*

$$Te_n = w_n e_{n+1}.$$

Où $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormée de $\mathcal{H}$. L'opérateur T est cyclique, on a $\mathcal{H} = span\{T^n e_0,\ n \geq 0\}$.

Théorème 2.1.2. *Si* $r_2(T) > 0$ *alors* $\mathcal{B}_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r_2(T)\}$.

Preuve : *Soit* $\lambda \in \mathcal{B}(T)$ *alors il existe* $k_\lambda \in \mathcal{H}$, $k_\lambda = \sum_{n\geq 0} \widehat{k}_\lambda^n e_n$ *tel que* $P(\lambda) =< P(T)e_0, k_\lambda >$ *pour tout polynôme* P. *En particulier ,*

$$\begin{aligned} \widehat{k}_\lambda^n &=< e_n, k_\lambda > \\ &=< \frac{1}{\beta_n} T^n(e_0), k_\lambda > \\ &= \frac{\lambda^n}{\beta_n}. \end{aligned}$$

Soit $y \in \mathcal{H}$ *alors* $y = \sum_n a_n e_n$ *et* $\widehat{y}(\lambda) =< y, k_\lambda >= \sum_n \frac{a_n}{\beta_n}\lambda^n$ *série absolument convergente (si* $\lambda < r_2(T)$*) alors* $\widehat{y}$ *est analytique en* λ *donc* $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$.

Ainsi $\mathcal{B}_a(T)$ *est non vide et le shift* T *est analytique.*$\square$

— *2) Un opérateur sous normal est dit pur s'il n'admet pas de restriction en un opérateur normal. Thomson dans [15], a montré que si* T *est un opérateur sous normal pur sur un espace de Hilbert* H *, alors* $\mathcal{B}_a(T)$ *est non vide et span*$\{k(\lambda) : \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\} = H$. *Par conséquent un opérateur cyclique sous normal pur est un opérateur analytique.(pour d'avantage d'information voir [5])*

— *3) Un opérateur* T *cyclique et normal ne peut pas être analytique. En effet, si* λ, μ *sont deux valeurs propres distinctes de* T *et* $k(\lambda), k(\mu)$ *leur vecteur propre respectif alors* $< k(\lambda), k(\mu) >= 0$ *alors* $|k(\lambda)|^2 = 0$ *si* $\lambda \to k(\lambda)$ *est continue s'ensuit que* $k(\lambda) = 0$ *ce qui est impossible.*

Nous donnons d'abord quelques résultats sur le commutant.

Proposition 2.1.3. *Soit* T *opérateur analytique, alors*

1. $\{T\}' \cap q\mathcal{N}(X) = \{T\}' \cap \mathcal{K}(X) = \{T\}' \cap \mathcal{F}(X) = \{0\}$.
2. *Si de plus* $\mathcal{B}_a(T)$ *est connexe alors* $\{T\}' \cap \mathcal{P}(X) = \mathbb{C}I$.

Preuve :

1. — Soit $N \in \{T\}' \cap q\mathcal{N}(X)$, pour tout $z \in \mathcal{B}(T)$ nous avons $T^*k(z) = zk(z)$ et $N^*T^*k(z) = T^*N^*k(z) = zN^*k(z)$. Il en résulte que $N^*k(z)$ est un vecteur propre de T^*, alors il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $N^*k(z) = \alpha k(z)$ donc $\alpha \in \sigma_p(N^*) = \{0\}$ et $N^*(k(z)) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{B}(T)$, comme *span*$\{k(\lambda) : \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\} = X^*$ nous déduisons que $N = 0$.

— Supposons que $S \in \{T\}' \cap \mathcal{K}(X)$. Suivant le même raisonnement que dans le premier cas, il existe une fonction analytique $z \to \alpha(z)$ telle que $S^*k(z) = \alpha(z)k(z)$ ce qui donne $\alpha \in \sigma_p(S^*) \cup \{0\}$. D'après le théorème de l'application ouverte, nous avons α est constante sur chaque composante connexe de $\mathcal{B}_a(T)$. Soit C une composante connexe sur laquelle $\alpha(z) = \alpha$. Soit encore pour tout $z \in C \quad k(z) \in N(S^* - \alpha)$ autrement dit $\dim N(S^* - \alpha) = \infty$: En effet, soient $z_1, z_2, ..., z_n \in C$ avec $z_i \neq z_j$ pour $i \neq j$ alors $\prod_{i \neq j}(T - z_i)^*(\alpha_1 k(z_1) + \alpha_2 k(z_2) + ... + \alpha_n k(z_n)) = 0$, autrement dit $\alpha_j \prod_{i \neq j}(x_j - x_i)k(x_j) = 0$ donc $\alpha_j = 0$ pour tout $1 \leq j \leq n$ et $\forall n \geq 1$. Nous déduisons que la famille $k(z_1), k(z_2), ..., k(z_n)$ est libre pour tout $n \geq 1$. Comme S est compact, alors $\alpha = 0$, et le fait que T est analytique implique $S = 0$.

La troisième affirmation est évidente puisque les opérateurs de rang fini sont compacts.

2. Supposons que S est un opérateur algébrique qui commute avec T, soit P un polynôme tel que $P(S) = 0$. Comme $S^*T^* = T^*S^*$ alors $T^*S^*k(z) = zS^*k(z)$ donc $S^*k(z) = \alpha(z)k(z)$. Notons que les fonctions $z \to \alpha(z)$, $z \to k(z)$, $z \to S^*k(z)$ sont analytiques, et $P(S^*)k(z) = P(\alpha(z))k(z) = 0$. On obtient $P(\alpha(z)) = 0 \quad \forall z \in \mathcal{B}_a(T)$. Soit encore $\alpha(z)$ est constante sur chaque composante connexe. Comme $\mathcal{B}_a(T)$ est connexe, nous déduisons que $\alpha(z) = \alpha \in \mathbb{C}$ et $S^* - \alpha I = 0$. Soit $S = \overline{\alpha} I$.

□

Nous déduisons le résultat suivant :

Corollaire 2.1.4. *Soit T un opérateur analytique tel que $\mathcal{B}_a(T)$ est connexe, alors T n'admet pas d'espace réduisant.*

Preuve : Supposons que E est un espace réduisant pour T. Soit F un espace supplémentaire invariant de E. La projection P_E sur E est telle que $N(P_E) = F$ est un opérateur borné idempotent qui commute avec T. Comme les idempotents sont algébriques, nous avons $P_E = \alpha I; \alpha \in \mathbb{C}$. Ainsi E est trivial. □

Remarque 2.1.5. *Dans la seconde affirmation de la proposition* (2.1.3)*, si nous supposons que $\mathcal{B}_a(T)$ n'est pas connexe, alors un opérateur algébrique dans le commutant de T est la somme finie d'opérateurs idempotents.*

Nous avons aussi :

Proposition 2.1.6. *Soit T un opérateur analytique. Supposons que $0 \in \mathcal{B}_a(T)$ alors T n'admet pas de racines $n^{éme}$ pour tout $n \geq 2$.*

Preuve : Soit $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $S^n = T$. Nous avons $S \in \{T\}'$ car $S^{n+1} = ST = TS$ par le même raisonnement qu'auparavant, il existe une fonction $\alpha : \mathcal{B}_a(T) \to \mathbb{C}$ analytique telle que $S^*k(\lambda) = \alpha(\lambda)k(\lambda)$. En particulier, $(S^*)^n k(\lambda) = \alpha^n(\lambda)k(\lambda) = T^*k(\lambda) = \lambda k(\lambda)$. Soit encore $\alpha^n(\lambda) = \lambda$ qui n'admet de solution si $0 \in \mathcal{B}_a(T)$. $\square$

Remarques 2.1.7. 1 *La proposition* (2.1.6) *est donnée pour le shift latéral à poids dans [14].*

2 *La connexité de $\mathcal{B}_a(T)$ est nécessaire pour la conclusion dans le corollaire* (2.1.4).

En effet, il suffit de prendre $T = S \oplus (2I + S) \in \mathcal{L}(H \oplus H)$, avec S est le shift sur un espace de Hilbert, alors $\mathcal{B}_a(T) = D(0,1) \cup D(2,1)$, $0 \oplus H$ et $H \oplus 0$ sont des espaces réduisants pour T.

Soit Ω un ensemble ouvert du plan complexe. On note par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'algèbre de Fréchet des fonctions holomorphes sur Ω muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact contenu dans Ω. Nous donnons une représentation des opérateurs analytiques qui s'avérera très utile par la suite.

Théorème 2.1.8. *Soit T un opérateur analytique, considérons l'application*

$$\begin{aligned} \phi : X &\to \mathcal{H}(\mathcal{B}_a(T)) \\ y \to \widehat{y} : \lambda &\to \qquad \widehat{y}(\lambda) = < y, k(\lambda) > . \end{aligned}$$

Alors

1 *ϕ est injective à image dense.*

2 *$\phi T = M_\lambda \phi$. Où M_λ est l'opérateur de multiplication par la variable indépendante λ dans $\mathcal{H}(\mathcal{B}_a(T))$.*

3 *Pour tout $S \in \{T\}'$ il existe $\psi \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_a(T))$ tel que $\phi S = M_\psi \phi$ où $M_\psi : f \to \psi f$.*

Preuve :

1. i) ϕ est injective : en effet $\phi(y) = 0 \Rightarrow \widehat{y}(\lambda) = 0 \Rightarrow < y, k(\lambda) > = 0$ pour tout $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$. Comme $span\{k(\lambda) : \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\} = X^*$ alors $y = 0$.

   ii)ϕ est à image dense :

$$\phi(P(T)x)(\lambda) = < P(T)x, k(\lambda) > = P(\lambda) \quad \text{car} \quad < x, k(\lambda) > = 1.$$

alors $\phi(X)$ contient des polynômes. Comme $\mathcal{B}_a(T)$ est simplement connexe, les polynômes sont denses dans $\mathcal{H}(\mathcal{B}_a(T))$. On en déduit que $\phi(X)$ est dense $\mathcal{H}(\mathcal{B}_a(T))$.

2. Il suffit de montrer que $\phi(TP(T)x)(\lambda) = \lambda\phi(P(T)x)(\lambda)$. En effet,

$$\begin{aligned}\phi(TP(T)x)(\lambda) &=< TP(T)x, k(\lambda) > \\ &=< P(T)x, T^*k(\lambda) > \\ &=< x, \lambda P(T^*)k(\lambda) > \\ &= \lambda P(\lambda).\end{aligned}$$

   Donc $\phi(TP(T)x)(\lambda) = \lambda\phi(P(T)x)(\lambda) = M_\lambda\phi(P(T)x)(\lambda)$.

   Comme $span\{P(T)x : P \text{ polyôme}\} = X$, nous avons : $\phi T = M_\lambda\phi$.

3. Soit $S \in \{T\}'$ comme précédemment, il existe $\psi \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_a(T))$ telle que $S^*k(\lambda) = \psi(\lambda)k(\lambda)$. Alors

$$\begin{aligned}\phi S(P(T)x)(\lambda) &= \phi(P(T)Sx)\lambda \\ &=< x, P(\lambda)S^*k(\lambda) > \\ &= P(\lambda) < x, \psi(\lambda)k(\lambda) > \\ &= P(\lambda)\psi(\lambda) \\ &= M_\psi\phi(P(T)x)(\lambda).\end{aligned}$$

   En utilisant encore le fait que $span\{P(T)x : P \text{ polyôme}\} = X$, on obtient $\phi S = M_\psi\phi$.

□

Remarques 2.1.9. 1 *La première partie du théorème* (2.1.8) *peut être trouvée dans [8].*

2 *Nous retrouvons les résultats de la proposition* (2.1.3) *en utilisant le théorème* (2.1.8).

Par exemple, supposons que $S \in \{T\}' \cap \mathcal{P}(X)$ *alors il existe une fonction analytique* ϕ *telle que :*

$$\phi S = M_\varphi\phi. \tag{2.1}$$

et pour tout polynôme P *nous avons* $P(S) = 0$ *alors d'après* (2.1), $M_{P(\varphi)}\phi = 0$ *ce qui donne* $P(\varphi) = 0$ *et* $\varphi = c$ *est constante. En utilisant encore* (2.1), *nous avons* $\phi S = c\phi$, *soit encore* $S = cI$.

Le théorème (2.1.8) nous permet de donner plus des résultats sur le commutant de T. Nous commençons par le corollaire suivant :

Corollaire 2.1.10. *Soit T un opérateur analytique, alors $\{T\}'$ est à domaine intégral et sous algèbre commutative maximale de $\mathcal{L}(X)$.*

Preuve : Soient S_1, S_2 deux éléments dans $\{T\}'$ et ψ_1, ψ_2 les fonctions analytiques associées. Supposons que $S_1 S_2 = 0$ alors

$$0 = \phi S_1 S_2 = M_{\psi_1} M_{\psi_2} \phi = M_{\psi_1 \psi_2} \phi.$$

Par conséquent $\psi_1 \psi_2 = 0$ ceci implique $\psi_1 = 0$ ou $\psi_2 = 0$ donc $S_1 = 0$ ou $S_2 = 0$.

La deuxième affirmation est une conséquence des égalités qui suivent :

$$\phi S_1 S_2 = M_{\psi_1} M_{\psi_2} \phi = M_{\psi_1 \psi_2} \phi = M_{\psi_2 \psi_1} \phi = \phi S_2 S_1$$

. □

Nous dirons que T admet la propriété de l'extension unique ou (SVEP) en $\lambda \in \mathbb{C}$ s'il existe $r > 0$ tel que pour tout sous ensemble ouvert $U \subset D(\lambda, r)$, la fonction constante $f \equiv 0$ est l'unique solution analytique de l'équation $(T - \mu) f(\mu) = 0$. Nous notons par $\mathcal{S}(T)$, l'ensemble ouvert où T n'admet pas la SVEP. Nous dirons qu'un opérateur T admet la SVEP si $\mathcal{S}(T) = \emptyset$. Il n'est pas difficile de voir que T admet des points d'évaluations bornés si et seulement si T^* n'admet pas la SVEP et $\mathcal{B}_a(T) = \mathcal{S}(T^*)$.

Proposition 2.1.11. *Soit S un opérateur borné tel que $S \in \{T\}'$ alors S^* n'a pas la SVEP .*

Preuve : Supposons que $S \in \{T\}'$, soit φ fonction analytique telle que $\phi S = M_\varphi \phi$. D'après le théorème (2.1.3), nous avons $(S - \varphi(\lambda))^* k(\lambda) = 0$. Soit $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$ et soit V un voisinage de λ pour lequel φ admet une fonction inverse ψ analytique, alors $S - \mu)^* k(\psi(\mu)) = 0$ et finalement S n'admet pas la SVEP. □ Une conséquence directe de ce résultat est :

Corollaire 2.1.12. *Si S^* est normal, hyponormal ou décomposable, alors $S \notin \{T\}'$.*

2.1.2 Image spectrale

Soient $A \in \mathcal{L}(X)$ et $u \in X$, on définit l'ensemble $\rho_A(u)$ la résolvante locale de A en u par définition : $\lambda \in \rho_A(u)$ s'ils existent un voisinage V_λ de λ et une fonction analytique $\widetilde{u}$ définie sur V_λ à valeurs dans X tel que $(A - \mu)\widetilde{u} = u$ pour tout $\mu \in V_\lambda$.

L'ensemble $\sigma_A(u) = \mathbb{C}\backslash\rho_A(u)$ est le spectre local de A en u. Par ailleurs $\sigma_A(u) \subset \sigma(A)$ et c'est un sous ensemble fermé de $\sigma(A)$.

La SVEP peut être caractérisée également en utilisant les spectres locaux. Nous avons l'équivalence suivante, T a la SVEP si et seulement si $\sigma_T(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \neq 0$. en effet, si T a la SVEP il est clair que $\sigma_T(x) \neq \emptyset$ $\forall x \neq 0$. Réciproquement, supposons que T n'admet la SVEP, soient V_λ un voisinage ouvert de λ et $\widetilde{u}$ une fonction analytique non nulle tel que $(T-\mu)\widetilde{u}(\mu) = 0$. On considére les fonctions u_1, u_2 définies sur V_λ par :

$$u_1(\mu) = \frac{\widetilde{u}(\lambda)}{(\lambda-\mu)} \quad \text{pour } \mu \neq \lambda,$$

et

$$u_2(\mu) = \begin{cases} \frac{\widetilde{u}(\lambda)-\widetilde{u}(\mu)}{(\lambda-\mu)}, & \text{si } \mu \in V_\lambda\backslash\{\lambda\}\,; \\ \widetilde{u}'(\lambda), & \text{si } \mu = \lambda\ . \end{cases}$$

Alors $(T-\mu)u_1(\mu) = (T-\mu)u_2(\mu) = \widetilde{u}(\lambda)$ et $\sigma_T(\widetilde{u}(\lambda)) = \emptyset$. Pour une étude détaillée des propriétés du spectre local voir[7, 10].

Par ailleurs, nous avons pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$

$$\sigma(T) = \cup_{x\in X}\sigma_T(x) \cup \mathcal{S}(T). \tag{2.2}$$

Ainsi si T a la SVEP, alors

$$\sigma(T) = \cup_{x\in X}\sigma_T(x). \tag{2.3}$$

Proposition 2.1.13. *Soit T un opérateur analytique tel que $\mathcal{B}_a(T)$ est connexe. Pour tout $S \in \{T\}'$ ($S \simeq M_\varphi$), nous avons :*

i) Pour tout $u \in X$, u non nul, $\varphi(\mathcal{B}_a(T)) \subset \sigma_S(u)$

ii) $\sigma_S(u)$ est connexe.

Preuve :

i) Soit $u \in X$, on suppose que $\varphi(\lambda) \in \varphi(\mathcal{B}_a(T))$ et $\varphi(\lambda) \notin \sigma_S(u)$. Alors ils existent un ouvert $V_{\varphi(\lambda)}$ et une fonction analytique $\widetilde{u}$ tels que $(S-\varphi(\beta)\widetilde{u}(\beta) = u$ pour tout $\varphi(\beta) \in V_\lambda$. Par suite,

$$\begin{aligned} < u, k(\beta) > &=< (S-\varphi(\beta))\widetilde{u}(\beta), k(\beta) > \\ &=< \widetilde{u}(\beta)(S-\varphi(\beta))^* k(\beta) > \\ &= 0 \qquad \text{Pour tout } \beta \in \varphi^{-1}(V_{\varphi(\lambda)}) \subset \mathcal{B}_a(T) \end{aligned}$$

Comme la fonction $\beta \to < u, k(\beta) >$ est analytique dans $\mathcal{B}_a(T)$ et s'annule sur $\varphi^{-1}(V_{\varphi(\lambda)})$ alors $< u, k(\beta) >= 0$ pour tout $\beta \in \mathcal{B}_a(T)$. Soit encore $u = 0$ puisque T est analytique, d'où la contradiction.

ii) Si $\sigma_S(u) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ et $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ avec σ_1, σ_2 sont fermés, alors ils existent u_1 et u_2 tels que $u = u_1 + u_2$ et $\sigma_S(u_1) \subset \sigma_1$ et $\sigma_S(u_2) \subset \sigma_2$. D'après $i)$ on a $\varphi(\mathcal{B}_a(T)) \subset \sigma_S(u_1) \cap \sigma_S(u_2) \subset \sigma_1 \cap \sigma_2$ ce qui est impossible. □

Théorème 2.1.14. *Soit T un opérateur analytique tel que $\mathcal{B}_a(T)$ est connexe. Pour tout $S \in \{T\}'$ non multiple de l'identité, nous avons :*

1. $int(\sigma(S)) \neq \emptyset$.

2. $\sigma_p(S) = \emptyset$.

3. $\sigma(S)$ est connexe.

Preuve :

1. On a $S = M_\varphi$ avec $\varphi \in \mathcal{H}(\mathcal{B}_a(T))$, l'ensemble $\varphi(\lambda)$ tel que $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$ est contenu dans $\sigma(S)$, alors $\varphi(\mathcal{B}_a(T)) \subset \sigma(S)$. Par ailleurs $\mathcal{B}_a(T)$ est un ouvert ($\mathcal{B}_a(T) \subset int(\mathcal{B}(T))$), d'après le théorème de l'application ouverte $\varphi(\mathcal{B}_a(T))$ est un ouvert, ainsi $int(\sigma(S))$ est non vide.

2. Soit $\lambda \in \sigma_p(S)$, soit u un vecteur propre associé à λ. Considérons la fonction $f(\beta) = \frac{u}{(\lambda-\beta)}$ analytique sur $V = \mathbb{C}\backslash\{\lambda\}$. Nous avons $(S-\beta))f(\beta) = u$ pour tout $\beta \in V$ donc $V \subset \rho_S(u)$ et s'ensuit que $\sigma_S(u) \subset \{\lambda\}$. Contradiction avec la proposition (2.1.13) $i)$.

3. D'après (2)S admet la SVEP pour tout u non nul $\sigma_S(u) \neq \emptyset$ et (2.3) implique que $\sigma(S)$ est la reunion de connexe d'intersection non vide donc connexe. □

2.1.3 Cyclicité forte

Rappelons qu'un opérateur A est hypercyclique (resp. supercyclique) s'il existe $x \in X$ tel que $\{A^n x : n \geq 0\}$ est dense pour un $x \in X$(resp.$\{\lambda A^n x : \lambda \in \mathbb{C}, n \geq 0\}$ est dense). Un tel vecteur x est appelé vecteur hypercyclique (resp. vecteur supercyclique) de A. Il est clair que si cA est hypercyclique pour un certain c, alors A est supercyclique. Nous verrons que l'adjoint d'un opérateur non trivial dans le commutant d'un opérateur analytique est en réalité supercyclique. Pour la démonstration, nous utiliserons le critère Hypercyclicité (HCC) suivant : A est hypercyclique s'il existe une suite croissante (n_k) des nombres entiers positifs pour laquelle on peut trouver

a) Un sous ensemble dense $Y \subset X$ tel que $(A^{n_k} y \to 0$ pour tout $y \in Y$.

b) Un sous ensemble dense $Z \subset X$ et une suite de fonctions $B_{n_k} : Z \to Y$ tels que $A^{n_k} B_{n_k} z \to z$ et $B_{n_k} z \to 0$ pour tout $z \in Z$.

Corollaire 2.1.15. *Soit T un opérateur analytique tel que $\mathcal{B}_a(T)$ est connexe et $S \neq \alpha I$ dans le commutant de T. Alors S^* est supercyclique.*

Preuve : Soit $S(\simeq M_\varphi)$ dans le commutant de T. Nous avons $\varphi(\mathcal{B}_a(T)) \subset \sigma_p(S^*)$ par conséquent d'intérieur non vide. Alors il existe $c > 0$ tels que $\varphi(\mathcal{B}_a(T)) \cap D(0,c) \neq \emptyset$ et $\varphi(\mathcal{B}_a(T)) \cap (\mathbb{C} \backslash \overline{D(0,c)} \neq \emptyset$, ces derniers sont d'intérieurs non vides. Nous posons $Y = span\{k(\lambda) : \varphi(\lambda) \in \varphi(\mathcal{B}_a(T)) \cap \overline{D(0,c)}\}$ et $span\{k(\lambda) : \varphi(\lambda) \in \varphi(\mathcal{B}_a(T)) \cap (\mathbb{C} \backslash \overline{D(0,c)})\}$. Alors Y, Z sont denses dans X^*. Nous pouvons vérifier que cS^* satisfait (HCC), par conséquent S^* est supercyclique. □

Remarque 2.1.16. *N.Feldmann [6] montre que l'adjoint d'un opérateur sous normal pur est cyclique. Comme un opérateur sous normal pur cyclique est analytique . Le corollaire* (2.1.15) *appliqué à cette classe nous donne que l'adjoint d'un opérateur sous normal est supercyclique.*

Opérateurs analytiques et quasi-similarité

Rappelons que deux opérateurs S, T sont quasi-similaires s'il existe deux transformations Y et Z injectives et à images denses tels que $TY = YS$ et $ZT = SZ$. En général les opérateurs quasi-similaires n'ont pas la même structure spectrale, c'est -à-dire le spectre essentiel, spectre approximatif mais il conserve le même spectre ponctuel. La classe d'opérateurs quasi-qui conserve la structure spectrale contient les opérateurs sous normaux, les hyponormaux et les opérateurs ayant la propriété (β). Nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1.17. *Soient S, T sont deux opérateurs cycliques quasi-similaires, alors*

1. *S est analytique.*
2. *$\mathcal{B}_a(T) = B_a(S)$.*

Preuve :

1. S est cyclique et Zx est son vecteur cyclique avec x est le vecteur cyclique de T. Soit $\{k(\lambda) : \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\}$ l'ensemble de vecteurs propres de T^* associés à la valeurs propre $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$. Alors $Y^*T^*k(\lambda) = \lambda Y^*k(\lambda) = S^*Y^*k(\lambda)$, comme Y^* est injective s'ensuit que $Y^*k(\lambda)$ est un vecteur propre de S^* associé à la valeur λ. Par ailleurs $\{Y^*k(\lambda) : \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\} = Y^*(\{k(\lambda) : \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\})$ est dense dans X^*, finalement S est analytique.
2. est triviale .$\square$

Shift à gauche

Shift à gauche est défini dans [3] comme un opérateur borné vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $\dim N(T) = 1$.
2. $N^\infty(T) =: \cup_{p\geq 0} N(T^p)$ est dense dans X.

Pour une étude détaillée sur le shift à gauche voir [3, 9]. B. A. Barnes voir [3] se consacre essentiellement à l'étude du commutant et le spectre du shift à gauche. Par la suite nous allons voir que l'adjoint d'un opérateur analytique est proche d'un shift à gauche. En effet,

Proposition 2.1.18. *Soit T un opérateur analytique tel que $\mathcal{B}_a(T)$ est connexe. Pour tout $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$. L'opérateur $(T-\lambda)^*$ est shift à gauche.*

Preuve :

1. T est analytique donc $\dim(T-\lambda)^* = 1$.
2. Soit $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$ et V un voisinage de λ tel que $k(\mu) = \sum_{p\geq 0} x_p(\mu-\lambda)^p$ pour tout $\mu \in V$. Alors $(T-\lambda)^{*p}x_{p-1} = 0$ où encore $x_p \in N^\infty(T)$ pour tout $p \geq 0$.

   Par ailleurs, soit $x \in X$ tel que $< x, x_p >= 0$ pour tout $p \geq 0$, alors $< x, k(\mu) >= 0$ pour tout $\mu \in V$ donc $< x, k(\mu) >= 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{B}_a(T)$. Il s'ensuit que $x = 0$ car T est analytique. La deuxième assertion est démontrée. $\square$

Exemple 2. *Nous démontrons par l'exemple suivant qu'un opérateur non analytique peut commuter avec un opérateur nilpotent. Il s'avérera utile d'étudier l'impact d'une telle perturbation sur l'ensemble des points d'évaluations analytiques.*

Soit H^2 l'espace de Hardy usuel :

$$H^2 = \{\sum_{n\geq 0} a_n z^n \backslash \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 < \infty\}.$$

Muni de la norme :

$$\|(a_n)\|^2 = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2.$$

Posons $\mathbb{C}^n = span\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}$, *et considérons* $H = H^2 \oplus \mathbb{C}^n$ *l'espace de Banach avec* $x = x_1 + x_2 \in H, \|x\|_H = \|x_1\|_{H^2} + \|x_2\|_{\mathbb{C}^n}$.

Soit S *le shift unilatéral sur* H^2 *défini par :* $S(z^n) = z^{n+1}$, N_0 *l'opérateur nilpotent sur* $\mathbb{C}^n$ *défini par :* $N_0(\varepsilon_1) = 0$ *et* $N_0(\varepsilon_p) = \varepsilon_{p-1}$ *pour* $2 \leq p \leq n$. *Soient* $T = (2I + S) \oplus N_0$ *et* $N = 0 + N_0$ *deux opérateurs dans* $\mathcal{L}(H)$. *Alors,*

1. T *et* N *sont cycliques*
2. $T + N = (2I + S) \oplus 2N_0$ *est un opérateur cyclique dont le vecteur cyclique est* (z, ε_1) *(nous utilisons le théorème de Runge voir[8, 2]).*
3. $\sigma(T) = \overline{D(2,1)}$ *et* $\mathcal{B}_a(T) = int(\mathcal{B}(T)) = D(2,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$.
   Pour tout $\lambda \in D(2,1)$, *alors* $\lambda \in \mathcal{B}(T)$ *et* $k(\lambda) =: \sum_{n\geq 0}(\lambda - 2)^n z^n \in H^2$ *est le vecteur propre associé. Il n'est pas difficile de voir que* $span\{k(\lambda) : \lambda \in \mathcal{B}_a(T)\} = H^2$ *(est non* H*).*
4. $B_a(T + N) = \mathcal{B}_a(T)$.

Théorème 2.1.19. *Soient* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur cyclique et* N *un opérateur cyclique nilpotent qui commute avec* T. *Alors*

$$\mathcal{B}(T) = B(T + N) \quad et \quad \mathcal{B}_a(T) = B_a(T + N).$$

Preuve : Nous prouvons seulement la dernière affirmation, la première est semblable.

Nous avons $\mathcal{B}_a(T) = \mathcal{S}(T^*)$, il suffit de montrer que $\mathcal{S}(T^*) = \mathcal{S}(T + N)^*$. En effet, soient $\lambda_0 \notin \mathcal{S}(T^*)$ et V un voisinage ouvert de λ_0 où la SVEP est satisfaisante. Supposons que $N^p = 0$, alors si

$$((T + N)^* - \lambda)x(\lambda) = 0 \quad \text{pour } \lambda \in V \tag{2.4}$$

En appliquant $(N^*)^{p-1}$ à (2.4), nous obtenons $(T^* - \lambda)(N^*)^{p-1}x(\lambda) = 0$. s'ensuit que $(N^*)^{p-1}x(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in V$, de même appliquons $(N^*)^{p-1}$ à (2.4) pour obtenir $(N^*)^{p-2}x(\lambda) = 0$, $\forall \lambda \in V$ et par induction nous avons $x(\lambda) = 0$ $\forall \lambda \in V$. Finalement $\lambda_0 \notin \mathcal{S}((T + N)^*)$. L'inclusion inverse est une conséquence de l'expression $T = T + N + (-N)$. $\square$

2.1.4 Sous espaces invariants

Rappelons qu'un sous espace fermé E de X est invariant pour T si $T(E) \subset E$, l'ensemble de tous les sous espaces invariants est noté $Lat(T)$. Nous notons par $T|E \in \mathcal{L}(E)$ la restriction de l'opérateur T à E. En général peu de choses peuvent être dites pour le spectre de $T_{|E}$. Il n'est pas difficile de voir que $\sigma(T_{|E}) \subset h(\sigma(T))$, où $h(.)$ est l'enveloppe convexe(nous remplissons tous les trous pour obtenir $h(.)$).

Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Proposition 2.1.20. *Soient $T \in \mathcal{L}(H)$ cyclique, $E \in Lat(T)$ et C une composante connexe de $\mathcal{B}_a(T)$, alors nous avons l'une des assertions suivantes :*

1. *$C \subset \sigma(T_{|E})$.*
2. *$k(\lambda) \perp E$ pour tout $\lambda \in C$.*

Preuve : Supposons que (1) n'est pas vérifiée, alors il existe un ouvert $V \subset C$ tel que $V \cap \sigma(T_{|E}) = \emptyset$. Pour $\lambda \in V$ et $x \in E$, nous avons :

$$\begin{aligned} < x, k(\lambda) > &=< (T_{|E} - \lambda)(T_{|E} - \lambda)^{-1}x, k(\lambda) > \\ &=< (T - \lambda)(T_{|E} - \lambda)^{-1}x, k(\lambda) > \\ &=< (T_{|E} - \lambda)^{-1}x, (T - \lambda)^{*}k(\lambda) > \\ &= 0 \qquad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Soit encore $x = 0$ du fait que $k(\lambda)$ est analytique. □
Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 2.1.21. *Si T est analytique tel que $\mathcal{B}_a(T)$ est connexe. Alors pour tout sous espace $E \in Lat(T)$, nous avons $\mathcal{B}_a(T) \subset \sigma(T_{|E})$. En particulier si $\mathcal{B}_a(T)$ est dense dans $\sigma(T)$, alors $\sigma(T_{|E}) = \sigma(T)$.*

Les sous espaces invariants pour l'adjoint T^* de T sont plus compliqués à déterminer. Nous donnons une description tout à fait précise pour des opérateurs ayant la propriété de Bishop (β).

Un opérateur T satisfait la propriété de Bishop (β) si pour tout ouvert U et pour tout suite $(f_n)_n$ de fonctions analytiques sur U à valeurs dans X telles que $(T - \mu)f_n(\mu) \to 0$ lorsque

$n \to \infty$ uniformément sur tout compact contenu dans U, alors $f_n(\mu) \to 0$ uniformément sur tout compact contenu dans U.

Plusieurs classes d'opérateurs satisfont la propriété (β) : les opérateurs normaux, sous normaux et hyponormaux. Nous avons un théorème utile liant les points d'évaluations bornés , le spectre , le spectre approximatif de T et la propriété (β). Voir [11] dans le cas d 'un espace de Hilbert, voir [12] dans le cas d'un espace de Banach.

Théorème 2.1.22. *Soit T un opérateur cyclique ayant la propriété (β), alors*

$$\mathcal{B}_a(T) = \sigma(T) \backslash \sigma_{ap}(T).$$

On pose $S = T^*$ et $S_M = S_{|M}$ où $M \in Lat(S)$. Alors

Théorème 2.1.23. *Soit T un opérateur cyclique ayant la propriété (β). Soit C une composante connexe de $\mathcal{B}_a(T)$. Alors*

1. $\sigma_{ap}(S_M) \cap C = \sigma_p(S_M) \cap C = \{\lambda \in C : \ k(\lambda) \in M\}$ *est soit discret ou tout C.*
2. $\sigma(S_M) \cap C = \sigma_p(S_M) \cap C$ *est discret ou tout C.*

Preuve :

1. La dernière égalité est triviale car pour tout $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$ on a $\dim(\ker(T-\lambda)^*) = 1$. Pour la première assertion, seulement une inclusion est à démontrer. Supposons que $\lambda \in \sigma_{ap}(S_M) \cap C$, montrons que $\lambda \in \sigma_p(S_M) \cap C$. Pour cela il suffit de montrer que $k(\lambda) \in M$. En effet, soit $x_n \in M$ tels que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_{n\to\infty} \|(S_M - \lambda)x_n\| = 0$. Comme T a la propriété (β) et $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$, d'après le théorème (2.1.22), nous déduisons que $T - \lambda$ est à image fermée soit encore $S - \lambda$ est à image fermée. Soit $\widehat{X} := X/\ker(S)$, alors $\widehat{X}$ est un espace de Banach (X espace de Banach) muni de la norme : pour $\widehat{x} \in \widehat{X}$, $\|\widehat{x}\| = d(x, \ker(S-\lambda)) = \inf\{\|x - y\| : \ y \in \ \ker(S-\lambda)\}$. On pose $R = S - \lambda$, ainsi nous pouvons définir $\widehat{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \widehat{R} : &\widehat{X} \to X \\ &\widehat{x} \to \widehat{R}(\widehat{x}) := R(x). \end{aligned}$$

Comme $S - \lambda$ est à image fermée alors $\exists c > 0$ tel que

$$\|(S_M - \lambda)x_n\| \geq c\|\widehat{x}_n\| \quad \forall n.$$

En particulier pour tout n(d'après la caractérisation de la borne inférieure), il existe y_n telles que $\widehat{y}_n = \widehat{x}_n$ et

$$c\|y_n\| \leq \|(S_M - \lambda)x_n\| \tag{2.5}$$

En utilisant le fait que $x_n - y_n \in \ker(T-\lambda)^* = \mathbb{C}k(\lambda)$, alors il existe $\alpha_n \in \mathbb{C}$ telle que $x_n - y_n = \alpha_n k(\lambda)$. Comme $\|\alpha_n k(\lambda)\| = \|x_n - y_n\| \leq 1 + \|y_n\|$, et d'après (2.5) $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, nous avons la suite $(\alpha_n)_n$ est bornée, supposons qu'elle converge vers une limite non nulle α(sinon on peut extraire une sous suite convergente). Autrement dit la suite $(x_n)_n$ converge vers $\alpha k(\lambda) \in M$ du fait que M est fermé. ainsi $k(\lambda) \in M$. La preuve de (1) est complète.

Pour montrer que $\sigma_p(S_M) \cap C$ est discret ou tout C, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 2.1.24. *Soit E un sous ensemble de C, Soit $V_E = span\{k(\lambda) : \ \lambda \in E\}$. Si E admet un point d'accumulation dans C, alors*

$$V_E = span\{k(\lambda) : \ \lambda \in E\} = span\{k(\lambda) : \ \lambda \in C\} = V_C.$$

Preuve : Une seule inclusion nécessite une preuve. Soit $x \in (V_E)^\perp$, la fonction $\widetilde{x}(z) =< x, k(z) >$ est une fonction analytique qui s'annule sur E. Comme E possède un point d'accumulation dans C, alors $\widetilde{x}(z) = 0$ pour tout $z \in C$ soit encore $x \in (V_C)^\perp$. La preuve du lemme est complète.

2. comme $\delta\sigma(S_M) \subset \sigma_{ap}(S_M)$, il en résulte que $\delta\sigma(S_M) \cap C$ n'admet pas de point d'accumulation dans C.

□

Remarque 2.1.25. *Le point essentiel de la démonstration est le fait que $\mathcal{B}_a(T) \cap \sigma_{ap}(T) = \emptyset(*)$. Alors, nous pouvons reformuler le Théorème 2.1.23 en utilisant $(*)$.*

Soit E un sous ensemble du plan complexe $\mathbb{C}$. Posons (voir [13])

$$S(T,E) = \cap_{\lambda\in E} R(T - \lambda I), \quad S(T,\emptyset) = X.$$

L 'application $E \to S(T,E)$ est décroissante et $S(T,E) = S(T, E \cap \sigma(T))$ $\forall E \subset \mathbb{C}$. Cette fonction a été introduite par C.R.Putnam voir [13] pour les opérateurs normaux et sous normaux . Son résultat principal est $S(T,\sigma(T)) = \{0\}$ pour ces opérateurs, pour le shift unilatéral $S(T,E) = \{0\}$ pour tout ensemble E admettant une valeur d'adhérence dans le disque.

Proposition 2.1.26. *Soit T un opérateur analytique, tel que $\mathcal{B}_a(T)$ est connexe. Alors $S(T,E) = \{0\}$ pour tout ensemble contenant une valeur d'adhérence dans $\mathcal{B}_a(T)$.*

Preuve : Soit $y \in S(T,E)$, $\lambda \in E$ et soit $x \in X$ tel que $y = (T-\lambda I)x$. Nous avons

$$< y, k(\lambda) >=< (T-\lambda I)x, k(\lambda) >=< x, (T-\lambda I)^* k(\lambda) >= 0$$

alors $k(\lambda) \perp S(T,E)$ pour tout $\lambda \in E (\lambda \in \mathcal{B}_a(T))$ et comme T est analytique $y = 0$. □
L'étude des sous espaces invariants de la transcription analytique du shift défini dans l'espace des fonctions analytiques a motivé plusieurs auteurs. Par exemple , dans [1] la description du spectre de la restriction aux sous espaces invariants a été traité en utilisant le concept de pseudo-continuité. Nous allons utiliser le concept des opérateurs analytiques pour retrouver ces résultats de manière plus simple.

Rappelons qu'un espace de Banach X de fonctions continues sur le disque fermé est dit analytique, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1 $X \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$

2 Les polynômes sont denses dans X.

3 $M_z(X) \subset X$ où $M_z(f)(\zeta) = \zeta f(\zeta)$.

4 $\sigma(M_z) = \overline{\mathbb{D}}$.

5 $L_\lambda(X) \subset X$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ avec $L_\lambda(f)(z) = \frac{f(z)-f(\lambda)}{z-\lambda}$.

Proposition 2.1.27. *Soit $\mathcal{B}$ espace de Banach de fonctions analytique sur $\mathbb{D}$ tel que $\mathcal{B} = Span\{z^n,\ n \geq 0\}$, alors nous avons les propositions suivantes :*

— $\mathcal{B} = Span\{(1-\lambda z)^{-1};\ \lambda \in \mathbb{D}\}$.

— *Si $A \subset \mathbb{D}$ admet un point d'accumulation dans $\mathbb{D}$ alors*

$$\mathcal{B} = Span\{(1-\lambda z)^{-1};\ \lambda \in A\}$$

Comme $span\{z^n, n \in \mathbb{N}\} = span\{\frac{1}{1-\lambda z};\ \lambda \in \mathbb{D}\}$ et d'après (2) $T = M_z$ est analytique , aussi (5) implique que $\sigma_{ap} M_z = \partial\mathbb{D}$. Alors $B_a(M_z) = \sigma(M_z) \backslash \sigma_{ap}(M_z)$. Pour obtenir les résultats de A.Aleman [1] il suffit d'appliquer le Théorème (2.1.23) à $S = L_0$ qui n'est autre que l'adjoint de M_z.

2.2 Cas Multicyclique

Définition 2.2.1. *Soit $T \in \mathcal{C}_n(X)$ un opérateur **n**-multicyclique. On dira que T est analytique si $span\{k_i(\lambda), \lambda \in \mathcal{B}_a^n(T), 1 \leq i \leq n\} = X^*$.*

Pour X un espace de Banach, on notera par $\mathbf{X^{(n)}} = \oplus_{1\leq j\leq n} X_j$ avec $X_j = X$, pour tout $x \in \mathbf{X^{(n)}}, x = \oplus_{1\leq j\leq n} x_j$ et $\|x\| = (\sum_{1\leq j\leq n} \|x_j\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Pour $A \in \mathcal{L}(X)$ on pose $\mathbf{A^{(n)}} = \oplus_{1\leq j\leq n} A_j$ ou $A_j = A$ et $\mathbf{A^{(n)}}(x) = (A_j x_j)_{1\leq j\leq n}$ pour tout $x \in \mathbf{X^{(n)}}$

Théorème 2.2.2. *On suppose que T est analytique et on considére l'application :*

$$\begin{array}{rcll} \Phi: & X & \mapsto & \mathcal{H}^{(n)}(\mathcal{B}_a^n(T)) \\ & y & \mapsto & \widehat{y} : \lambda \mapsto \widehat{y}(\lambda) = (< y, k_1(\lambda) >, ..., < y, k_n(\lambda) >), \end{array}$$

alors on a :

1- l' application ϕ est injective et à image dense .

2- $\phi T = \mathbf{M}_\lambda^{(\mathbf{n})} \phi$. Où M_λ est l'opérateur de multiplication par λ sur l' espace $\mathcal{H}(\mathcal{B}_a^n(T))$.

3- Pour tout $S \in \{T\}'$ il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{H}(\mathcal{B}_a^n(T)))$ ou ($\mathcal{M}_n$ ensemble des matrices d'ordre n) tel que $\phi S = M\phi$.

Preuve : 1-i) ϕ est injective : En effet $\phi(y) = 0 \Rightarrow \widehat{y}(\lambda) = 0$ donc $< y, k_i(\lambda) >= 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ comme $span\{k_i(\lambda), \lambda \in \mathcal{B}_a^n(T), 1 \leq i \leq n\} = X^*$ on a alors $y = 0$.
ii) ϕ est à image dense :

$$\begin{aligned} [\phi(\sum_{i=1}^n P_i(T)x_i))(\lambda)]_j &=< \sum_{i=1}^n P_i(Tx_i), k_j(\lambda) > \\ &= \sum_{i=1}^n < P_i(T)x_i), k_j(\lambda) > \\ &= P_j(\lambda) \end{aligned}$$

Pour tout $1 \leq j \leq n$ On a $[\phi(X)]_j$ contient les polynômes , $\mathcal{B}_a^n(T)$ étant simplement connexe , l' ensemble des polynômes est dense dans $\mathcal{H}(\mathcal{B}_a^n(T))$ donc $\phi(X)$ est dense $\mathcal{H}^{(n)}(\mathcal{B}_a^n(T))$.
2- Il suffit de montrer que : $\phi(T\sum_{i=1}^n (P_i(T)x_i)(\lambda) = \lambda\phi(\sum_{i=1}^n P_i(T)x_i)(\lambda)$.
Or on a :

$$\begin{aligned}
[\phi(T\textstyle\sum_{i=1}^{n}P_i(T)x_i))(\lambda)]_j &=< \textstyle\sum_{i=1}^{n}TP_i(T)x_i)), k_j(\lambda) > \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} < P_i(T)x_i, T^*k_j(\lambda > \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} < x_i, \lambda P_i(T^*)k_j(\lambda) > \\
&= \lambda P_j(\lambda) \\
&= M_\lambda P_j(\lambda) \\
&= M_\lambda[\phi(\textstyle\sum_{i=1}^{n}P_i(T)x_i))(\lambda)]_j \ (\forall\ 1 \leq j \leq n) \\
\phi(T\textstyle\sum_{i=1}^{n}P_i(T)x_i))(\lambda) &= \mathbf{M}_\lambda^{(\mathbf{n})}\phi(\textstyle\sum_{i=1}^{n}P_i(T)x_i))(\lambda)
\end{aligned}$$

Comme $\{\sum_{i=1}^{n}P_i(T)(x_i); P_1, P_2, ..., P_n \in \mathcal{P}\}$ est dense dans X on a : $\phi T = \mathbf{M}_\lambda^{(\mathbf{n})}\phi$

3- Soit $S \in \{T\}^{'}$ donc $T^*S^* = S^*T^*$ pour tout $\lambda \in \mathcal{B}_a(T)$ on a $T^*S^*k_i(\lambda) = S^*T^*k_i(\lambda) = \lambda S^*k_i(\lambda)$ donc $S^*k_i(\lambda) \in N(T-\lambda)^*$ soit $S^*k_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j^i(\lambda)k_j(\lambda)$ où $\lambda \to \alpha_j^i(\lambda)$ est une fonction analytique pour tout $1 \leq i, j \leq n$

$$\begin{aligned}
[\phi(\sum_{i=1}^{n}SP_i(T)x_i))(\lambda)]_j &= \sum_{i=1}^{n} < P_i(T)Sx_i), k_j(\lambda) > \\
&= \sum_{i=1}^{n} < P_i(T)x_i), S^*k_j(\lambda) > \\
&= \sum_{i=1}^{n} < x_i, P_i(T^*)S^*k_j(\lambda) > \\
&= \sum_{i,l=1}^{n} P_i(\lambda) < x_i, \alpha_l^j(\lambda)k_l(\lambda) > \\
&= \sum_{i,l=1}^{n} P_i(\lambda)\alpha_l^j(\lambda) < x_i, k_l(\lambda) > \\
&= \sum_{i,l=1}^{n} P_i(\lambda)\alpha_l^j(\lambda) < x_i, k_l(\lambda) > \\
&= \sum_{i,l=1}^{n} P_i(\lambda)\alpha_l^j(\lambda)\delta_{il} \\
&= \sum_{i=1}^{n} P_i(\lambda)\alpha_i^j(\lambda) \\
&= (\alpha_1^j(\lambda), ..., \alpha_n^j(\lambda))\phi(\sum_{i=1}^{n}P_i(T)(x_i))(\lambda) \ (\forall\ 1 \leq j \leq n)
\end{aligned}$$

on a donc $\phi(S\sum_{i=1}^{n}P_i(T)x_i)) = M\phi(\sum_{i=1}^{n}P_i(T)(x_i))$

Avec $M = (\alpha_i^j)_{1\leq i,j\leq n}$, T étant **n** - multicylique on a : $\phi S = M\phi$.□

Proposition 2.2.3. *Soit $T \in \mathcal{C}_n(X)$ opérateur analytique alors :*

1. *soit $S \in \{T\}' \bigcap \mathcal{N}(X)$ alors $S^n = 0$*
2. *On suppose que T est **n** - cyclique et $S \in \{T\}' \bigcap \mathcal{P}(X)$ alors $S = D(\alpha) \oplus N$. où D matrice diagonale et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ et $N \in \mathcal{N}(X)$ d'ordre inférieur ou egal à n .*

Preuve : 1- On a $S \in \{T\}' \bigcap \mathcal{N}(X)$ d' aprés le théoréme 2.2.2 $\phi S = M\phi$ où $M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{H}(\mathcal{B}_a^n(T)))$. Si S est nilpotente d'ordre p on a $\phi S^p = M^p\phi = 0$ implique $M^p = 0$ comme $dim\mathcal{M}_n(\mathcal{H}(\mathcal{B}_a^n(T))) = n$ donc $M^n = 0$ soit $S^n = 0$.

2- Soit $T \in \mathcal{C}_n(X)$ et $S \in \{T\}' \bigcap \mathcal{P}(X)$ comme $S \in \mathcal{P}(X)$ alors il existe P polynôme de degré inférieur ou égale à n tel que $P(S) = 0$ et d' aprés la représentation de Ritz, nous avons $S = \oplus_{1 \leq i \leq m}(\lambda_i + N_i)$ avec $\lambda_i \in \sigma(S) \subset Z(P)$ et $N_i \in \mathcal{N}(X)$ d'ordre s_i ordre de multiplicité de λ_i pour tout $(1 \leq i \leq m)$. Donc $S = D(\alpha) \oplus N \in \{T\}'$ avec $D(\alpha)$ matrice diagonale, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ implique que $N = \oplus_{1 \leq i \leq m} N_i \in \{T\}'$ et on applique la proposition 2.2.3-1 sachant que $N \in \mathcal{N}(X)$ d' ordre inférieur ou égal é n. $\square$

Remarque 2.2.4. *Dans le cas d'un opérateur cyclique on a $S \in \{T\}' \bigcap \mathcal{N}(X)$ implique $S = 0$. Dans le cas d'un opérateur **2**-cyclique par exemple $S \in \{T\}' \bigcap \mathcal{N}(X)$ peut s'identifier à $S = \begin{pmatrix} 0 & \varphi(\lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\varphi(\lambda)$ fonction analytique sur $\mathcal{B}^n(T)$.*

Le probléme suivant a été pendant longtemps soulevé dans la litérature par Newman -muller par exemple : Soit $T \in \mathcal{L}(X)$, on suppose que $\sigma_p(T)$ est d'intérieur non vide, T satisfait-il la SVEP ?

L' exemple suivant donne une réponse positive. Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ le disque unité ouvert, soit $X = \mathcal{M}(\mathbb{D})$ l'espace de Banach de mesure complexe sur $\mathbb{D}$ et $T \in \mathcal{L}(X)$ l'opérateur de multiplication par la variable indépendante z , $T : \mu \mapsto z.\mu$ avec $z.\mu(f) = \int_{\mathbb{D}} zf(z)d\mu$. Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on considére δ_λ la mesure de Dirac en $\{\lambda\}$, alors $(T - \lambda)\delta_\lambda(f) = \int_{\mathbb{D}}(z - \lambda)f(\lambda)d\delta_\lambda = 0$ pour toute fonctions continue à support sur $\mathbb{D}$, donc $(T - \lambda)\delta_\lambda = 0$ implique $(\mathbb{D} \subset \sigma_p(T))$ et $\sigma_p(T)$ d' intérieur non vide .

D'un autre coté si $(T - \lambda)\mu(\lambda) = 0$ alors $\mu(\lambda) = c(\lambda)\delta_\lambda$ on peut supposer que $c(\lambda) = 1$ et $\lambda \mapsto \delta_\lambda$ n'est pas continue du fait que $\|\delta_\lambda - \delta_\nu\| \geq 1$ pour $\lambda \neq \nu$, or $\lambda \mapsto \mu(\lambda)$ est mesure analytique donc $\mu(\lambda) = 0$ d'où T admet la SVEP.

Dans le cas d'espace de Banach séparable , ce n'est que trés récemment que J.Bračič et V.Müller ont donné un contre- exemple à la conjoncture, plus précisemment on a le théoréme suivant :

Théorème 2.2.5. *[4] Il existe un espace de Banach séparable X et un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(X)$ satisfaisant la SVEP et tel que l' intérieur du spectre ponctuel est non vide .*

L'exemple est pris en considérant m la restriction de la mesure de Lebesgue à $\mathbb{D}$, et $X = L^1(m)/A^1(m)$ où $L^1(m)$ l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{D}$ et $A^1(m)$ est l'espace de Bergman des fonctions dans $L^1(m)$ analytiques sur $\mathbb{D}$, et l'opérateur $T = \Pi(M_z)$ où l'opérateur M_z est la multiplication par z sur $L^1(m)$ et $\Pi : L^1(m) \mapsto X$ est la projection canonique.

Le coté positif, il est établit dans [11] que si T est cyclique alors $\sigma_p(T) \neq \emptyset$ si et seulement si T n' a pas la SVEP. dans ce qui suit on généralise ce résultat au cas d'opérateur multicyclique.

Théorème 2.2.6. *Soit $T \in \mathcal{C}_n(X)$ alors : $int(\mathcal{B}^n(T)) \neq \emptyset \Leftrightarrow T^*$ n'a pas la SVEP .*

Preuve : Soit $\lambda \in int(\mathcal{B}^n(T))$, il existe $r > 0$ tel que $D = \overline{D(\lambda, r)} \subseteq \mathcal{B}^n(T)$.

Nous définissons par :

$$D_p = \{\mu \in D \ \sup_{1\leq i\leq n} \|K_i(\mu)\| \leq p\}.$$

Nous avons alors :

$$D = \bigcup_{p=1}^{p=\infty} D_p$$

Avec

$$\|K_j(\mu)\| = \sup_{\|\sum_{i=1}^n P_i(T)x_i\|\neq 0} \frac{|P_j(\mu)|}{\|\sum_{i=1}^n P_i(T)x_i\|}.$$

La fonction $\mu \mapsto \|K_j(\mu)\|$ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{B}^n(T)$, il est de même pour la fonction $\mu \mapsto \sup_{1\leq j\leq n} \|K_j(\mu)\|$, utilisant les propriétés des fonctions semi-continues , on a D_p est fermé. En utilisant le lemme de Baire , il existe p_0 tel que $int(D_{p_0})$ est non vide. Et, on a d'aprés la proposition 1.1.11 , $int(D_{p_0}) \subset \mathcal{B}_a(T)$. Donc T^* n'admet pas la SVEP.

L'autre sens est évident. □

Remarque 2.2.7. *Si $T \in \mathcal{C}_n(X)$ on a pas le corollaire 2.1.4 : Si T est analytique , $\mathcal{B}_a^n(T)$ est connexe alors T n'admet pas d'espace réduisant.*

Exemple 3. *Soit S l' opérateur shift définit dans l'espace de Hardy H^2 et $X = H^2 \bigoplus H^2$ on considére l'opérateur $T = S \oplus 2S$, alors l'opérateur T est 2- cyclique : en effet pour tout $\lambda \in D(0,1)$ on a $dimN(T-\lambda)^* = 2$ et $X = Span\{T^m(e_0, 0), T^n(0, e_0);\ m, n \geq 0\}$ où $(e_n)_{(n\geq 0)}$ est une base orthonomée de H^2. On a $\mathcal{B}_a(T) = D(0,1)$ connexe . $H^2 \bigoplus 0$ et $0 \bigoplus H^2$ sont deux espaces réduisants pour T .*

Troisième partie

Opérateurs de Composition.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce paragraphe, seront présentées plusieurs notions ainsi que des résultats et techniques utiles pour la partie I.

1.1 Mesures et dimensions de Hausdorff.

Soit E un compact sur la droite. Pour tout $\rho > 0$, considérons un recouvrement de E par les intervalles ouverts $(\Delta_i)_{1\leq i}$ de longueur $|\Delta_i|$ inférieure ou égale à ρ, et considérons la somme

$$\sum_i |\Delta_i|^\alpha$$

avec $0 < \alpha \leq 1$, quand les Δ_i varient arbitrairement , ρ étant fixe. Cette somme admet alors une borne inférieure :

$$H^\alpha_\rho(E) = \inf_{(\Delta_i)} \sum_i |\Delta_i|^\alpha.$$

Cette dernière croît quand ρ décroît ; elle admet donc une limite (éventuellement infinie) quand ρ tend vers 0. La mesure de Hausdorff de E d'ordre α, est alors notée $H^\alpha(E)$, soit

$$H^\alpha(E) = \lim_{\rho\to 0} H^\alpha_\rho(E).$$

La dimension de Hausdorff de E est définie en fonction de $H^\alpha(E)$, nous la noterons par $\dim_H(E)$.

$$\dim_H(E) = \sup\{\alpha > 0 : H^\alpha(E) = \infty\} = \inf\{\alpha > 0 : H^\alpha(E) = 0\}.$$

Nous déduisons que :

— $H^\alpha(E) = \infty \quad si \quad 0 < \alpha < \dim_H(E)$.

— $H^{\alpha}(E) = 0 \quad si \quad \dim_H(E) < \alpha$.

— $0 \leq H^{\dim_H(E)}(E) \leq \infty$.

Ainsi, si pour une valeur de α, on a $0 < H^{\alpha}(E) < \infty$ alors $\dim_H(E) = \alpha$.

Proposition 1.1.1. — *Si* $E \subset F$ *alors* $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$.

— *Si* $E = \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ *alors* $\dim_H(E) = \sup(\dim_H(E_i))$.

Preuve

— Supposons que $F \subset \cup\Delta_i$, avec $|\Delta_i| \leq \rho$ alors $H^{\alpha}(E) \leq H^{\alpha}(F)$.

Si $\dim_H(F) < s$ alors $H^s(F) = 0$ implique $H^s(E) = 0$ donc $\dim_H(E) \leq s$.

— Pour tout i, $E_i \subset \cup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, $\dim_H(E_i) \leq \dim_H(\cup_i E_i)$ donc $\sup(\dim_H(E_i)) \leq \dim_H(\cup_i E_i)$.

Inversement :

si $\dim_H(E_i) < s$ alors $H^s(\cup_i E_i) \leq \sum_i H^s(E_i) = 0$ donc $\dim_H(\cup_i E_i) \leq s$.

□

Exemples. — *Si* E *est fini alors* $\dim_H(E) = 0$.

En effet , soit $E = \cup_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$ *et soit un recouvrement de* E

$$\bigcup_i \left]x_i - \frac{\epsilon^{1/\alpha}}{2n^{1/\alpha}}, x_i + \frac{\epsilon^{1/\alpha}}{2n^{1/\alpha}}\right[, \qquad \epsilon > 0.$$

$H^{\alpha}_{\epsilon}(E) \leq \epsilon$ *donc* $H^{\alpha}(E) = 0$ *pour tout* $\alpha > 0$ *d'où le résultat.*

— *Si* E *est dénombrable alors* $\dim_H(E) = 0$.

$E = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$ *où* E_i *est fini pour tout* $i \in \mathbb{N}$, *comme* $\dim_H(E) = \sup(\dim_H(E_i))$, *ceci implique* $\dim_H(E) = 0$.

— *Si* $|E| > 0$ *alors* $\dim_H(E) = 1$.

Soit $s < 1$ *et* (Δ_i) *un recouvrement de* E *avec* $|\Delta_i| \leq \rho$ *pour tout* i *alors*

$$\sum_i |\Delta_i|^s |\Delta_i|^{1-s} \leq \rho^{1-s} \sum_i |\Delta_i|^s$$

$$\sum_i |\Delta_i|^s \geq \rho^{s-1}|E|.$$

Donc pour tout $s < 1$, $H^s(E) = \infty$. *Si* $s > 1$, $H^s(E) = 0$ *alors* $\dim_H(E) = 1$.

— *La dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor* C *à rapport constant* λ *est* $s = \ln p/\ln(\frac{1}{\lambda})$ *avec* $(p \in \mathbb{N}; p \geq 2)$; $0 < \lambda < \frac{1}{p}$ *et* $H^s(C) = 1$.

Soit $E_0 = [0,1]$. *Notons* E_k *la réunion de* p^k *intervalles disjoints de longueur* λ^k, *lors de* *la $k^{\text{\textbf{ième}}}$ étape de la construction de $C = \cap_k E_k$. Soit (Δ_k) le recouvrement de C composé de p^k intervalles E_k de longueurs λ^k nous avons alors :*

$$H^{\alpha}_{\lambda^k} \leq \sum_{i=1}^{p^k} |\Delta_i|^{\alpha} = p^k \lambda^{k\alpha}$$

Ceci montre que $H^{\alpha}(C) = 0, \;\; si\ \alpha > s$;

$$H^{\alpha}(C) \leq 1, \;\; si\ \alpha = s.$$

Soient $\alpha < s$ et $\rho = \lambda^N$, alors $H^{\alpha}_{\rho}(C) = H^{\alpha}_{\rho}(E_N) = p^N \lambda^{\alpha N}$.

On obtient :

$$H^{\alpha}(C) = \begin{cases} \infty, & si \quad \alpha < s, \\ 1, & si \quad \alpha = s. \end{cases}$$

Donc

$$\dim_H(C) = \frac{\ln(p)}{\ln(\frac{1}{\lambda})}.$$

Nous utiliserons les notations $a \preceq b$ pour dire qu' il existe c positive tel que $a \leq cb$ et $a \asymp b$ signifie que $a \preceq b$ et $b \preceq a$.

1.2 Capacités.

Nous désignerons par E un ensemble fermé du cercle $\mathbb{T}$. pour $\alpha \in [0,1)$, nous définissons le noyau $k_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ par :

$$k_\alpha(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{t^\alpha} & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1, \\ \log \dfrac{1}{t} & \text{si} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$, l'énergie α associé à cette mesure est définie par :

$$I_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} k_\alpha(|\zeta - \eta|) d\mu(\zeta) d\mu(\eta)$$

Proposition 1.2.1.

$$I_\alpha(\mu) \asymp \sum_{n \geq 0} \frac{|\widehat{\mu}(n)|^2}{(1+n)^{1-\alpha}}$$

Preuve

Soit le potentiel de μ, $U_\alpha(\mu) = k_\alpha * d\mu$, on a

$$U_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{T}} k_\alpha(|\zeta - \eta| d\mu(\eta)$$

Puisque

$$I_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{T}} U_\alpha(\mu)(\zeta) d\mu(\zeta)$$

Soit les séries de Fourier suivantes

$$k_\alpha(|.|) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{int} \qquad \text{avec} \quad \gamma_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi k_\alpha(t) e^{-int},$$

$$d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mu}(n) e^{int} \qquad \text{avec} \quad \widehat{\mu}(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{-int} d\mu(t)$$

Donc

$$U_\alpha(\mu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mu}(n)\gamma_n e^{int}$$

et

$$I_\alpha(\mu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mu}(n)\gamma_n \widehat{\mu}(-n).$$

Comme la mesure μ est réelle, $\widehat{\mu}(-n) = \overline{\widehat{\mu}(n)}$, et $\gamma_n = \gamma_{-n}$ ($\gamma_n \geq 0$) nous avons :

$$I_\alpha(\mu) \asymp \sum_{n\in\mathbb{N}} |\widehat{\mu}(n)|^2 \gamma_n$$

Le calcul de γ_n pour $\alpha = 0$ donne :

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (-\log(t))\cos(nt)dt \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u} du \\
&\asymp \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Pour $0 < \alpha < 1$,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{t^\alpha} dt \\
&= \frac{2\alpha}{n^{1-\alpha}\pi}\int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{u^{\alpha+1}} du \\
&\asymp \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

$\square$

$\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des mesures de probabilité à support dans E.

La α capacité du compact E est définie par :

$$C_\alpha(E) := 1/ \inf_{\mu\in\mathcal{P}(E)} I_\alpha(\mu)$$

Nous avons

Proposition 1.2.2. *. Soit E_1 et E_2 des compacts tels que $E_1 \subset E_2$ alors $C_\alpha(E_1) \subset C_\alpha(E_2)$*

Preuve

On pose

$$I_\alpha(E) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}(E)} I_\alpha(\mu),$$

Si $E_1 \subset E_2$ alors $\mathcal{P}(E_1) \subset \mathcal{P}(E_2)$. Ainsi Donc $I_\alpha(E_1) \geq I_\alpha(E_2)$ et $C_\alpha(E_1) \leq C_\alpha(E_2)$. $\square$

En particulier $C_\alpha(E) > 0$ si et seulement si il existe une mesure de probabilité μ et un sous ensemble $E^{'}$ de E, tel que : $I_\alpha(\mu)$ est finie. Si $\alpha = 0$, C_0 est appelé la capacité logarithmique notée par C.

Proposition 1.2.3. *. Soit E un ensemble compact. Si $0 \leq \alpha \leq \beta < 1$, alors :*

$$C_\alpha(E) = 0 \ \ implique \ \ C_\beta(E) = 0.$$

$$C_\beta(E) > 0 \ \ implique \ \ C_\alpha(E) > 0.$$

Nous appelons la dimension capacitaire, introduite par Frostman, de E, nous la noterons par $\dim_C(E)$:

$$\dim_C(E) := \inf\{\alpha \in [0,1)/C_\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha \in [0,1)/C_\alpha(E) > 0\}$$

Nous avons alors :

$$C_\alpha(E) = 0 \ \ pour \ \ \alpha \geq \dim_C(E)$$

$$C_\alpha(E) > 0 \ \ pour \ \ \alpha < \dim_C(E)$$

Ce qui nous donne un certain ordre de grandeur d 'un ensemble compact donné, nous remarquons que plus $\dim_C(E)$ est petite plus l'ensemble E est petit. Une autre interprétation de $\dim_C(E)$ est donnée par :

Théorème 1.2.4. *[20] La dimension capacitaire* $\dim_C(E)$ *coincide avec la dimension Hausdorff* $\dim_H(E)$.

La démonstration détaillée de ce théorème se trouve dans [20]

1.3 Espaces de fonctions analytiques.

Soient $\mathbb{C}$ le plan complexe, l'ensemble $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert, le cercle unité $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\}$, la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$ est notée par dm ou par $\frac{1}{2\pi}d\theta$ en coordonnées polaires. On note par dA la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{D}$ normalisée : $dA = \frac{1}{\pi}dxdy = \frac{1}{\pi}rdrd\theta$. Soit $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$. Soit $\alpha > -1$, on note par $dA_\alpha(z)$, la mesure finie, définie sur $\mathbb{D}$ par

$$dA_\alpha(z) := (\alpha + 1)(1 - |z|^2)^\alpha dA(z)$$

Espace de Bergman à poids $\mathcal{A}_\alpha$

L'espace de Bergman $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_\alpha(\mathbb{D})$, est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) \cap L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ vérifiant

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA_\alpha(z).$$

$\mathcal{A}_\alpha$ est un espace de Hilbert muni de la restriction du produit scalaire défini sur $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ par :

$$\langle f, g\rangle_\alpha = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}dA_\alpha(w).$$

Proposition 1.3.1. *Soit* $f \in \mathcal{A}_\alpha$ *telle que* $f(z) = \sum_n a_n z^n$. *Alors*

$$\|f\|^2_{\mathcal{A}_\alpha} = \sum_n \frac{|a_n|^2}{(n+1)^{1+\alpha}}. \tag{1.1}$$

Preuve

En effet

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle_\alpha &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{g(w)}dA_\alpha(w) \\ &= \sum_n \frac{\Gamma(2+\alpha)n!}{\Gamma(n+2+\alpha)} a_n \overline{b_n} \end{aligned}$$

où $f(z)=\sum_n a_n z^n$ et $g(z)=\sum_n b_n z^n$ et Γ est la fonction Gamma :

$$\Gamma(t)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx.$$

Nous avons

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha}^2=\sum_n \frac{\Gamma(2+\alpha)n!}{\Gamma(n+2+\alpha)}|a_n|^2.$$

Notons que d 'après la formule de Stirling

$$\frac{\Gamma(2+\alpha)n!}{\Gamma(n+2+\alpha)}\asymp (n+1)^{-1-\alpha}.$$

par suite la norme (1.1). □

Remarque 1.3.2. *La suite de fonctions* $e_n(z)=\sqrt{\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)n!}}z^n$ *forme une famille orthonormée dans* $\mathcal{A}_\alpha$. *Comme les polynômes sont denses dans* $\mathcal{A}_\alpha$, *alors* $(e_n(z))_{n\geq 0}$ *forme une base orthonormée de* $\mathcal{A}_\alpha$.

et

$$\frac{1}{(1-|z|^2)^{\alpha+2}}\asymp \sum_n (n+1)^{1+\alpha}|z|^{2n}$$

La proposition suivante montre que l'espace $\mathcal{A}_\alpha$ admet un noyau reproduisant.

Proposition 1.3.3. *Soient* $w\in\mathbb{D}$ *et* $z\in\mathbb{D}$, *alors il existe (d'après Riesz)* $K_w^\alpha\in\mathcal{A}_\alpha$ *tel que :*

1. $K_w^\alpha(z)=\dfrac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}$
2. $f(w)=\langle f,K_w^\alpha\rangle_\alpha,\ f\in\mathcal{A}_\alpha$

Preuve

1- Notons que

$$K_w^\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)n!}(z\overline{w})^n=\frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}$$

2-

$$\langle f,K_w^\alpha\rangle_\alpha=\langle f(z),\sum_{n=0}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(w)}\rangle_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\langle f(z),e_n(z)\rangle_\alpha e_n(w)=(\sum_{n=0}^{\infty}\langle f,e_n\rangle_\alpha e_n)(w)=f(w).$$

□

Par conséquent nous avons :

Proposition 1.3.4. *Soient* $f\in\mathcal{A}_\alpha$, *K compact contenu dans* $\mathbb{D}$ *alors il existe une constante* $C=C(K,\alpha)$ *tel que :*

$$|f(z)|\leq C\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha}$$

Preuve

On peut supposer que $K = \{z \in \mathbb{D}, |z| \leq r\}$, avec $r < 1$, en utilisant l'inégalité de Schwartz

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \|K_z^\alpha\|_{\mathcal{A}_\alpha} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \sum_n \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)n!}|z|^{2n} \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \sum_n \frac{\Gamma(n+2+\alpha)}{\Gamma(2+\alpha)n!}r^{2n} \\
&= \|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \frac{1}{(1-r^2)^{\alpha+2}} = C\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha}.
\end{aligned}$$

□

L'espace $\mathcal{A}_\alpha$ est un sous espace fermé de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ on peut introduire donc la projection P_α définie de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sur $\mathcal{A}_\alpha$.

Théorème 1.3.5. *Soit $\alpha > -1$, P_α la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sur $\mathcal{A}_\alpha$ Alors pour tout $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$, on a*

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w) \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Preuve

D'après la proposition (3.1) $\langle P_\alpha f(z), K_z^\alpha \rangle_\alpha = \langle f, K_z^\alpha \rangle_\alpha$ □ Nous aurons besoin d'estimations de l'opérateur intégral dans $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ qu'on utilisera assez souvent .

Théorème 1.3.6. *[16] Soient $\alpha > -1$ et $\beta \in \mathbb{R}$ on pose*

$$I_{\alpha,\beta} = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2+\alpha+\beta}} dA(w),$$

$$J_\beta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-ze^{i\theta}|^{1+\beta}}.$$

Alors pour $|z| \to 1^-$, nous avons

$$I_{\alpha,\beta} \asymp J_\beta \asymp \begin{cases} 1, & si \quad \beta < 0, \\ \log \dfrac{1}{(1-|z|^2)}, & si \quad \beta = 0, \\ \dfrac{1}{(1-|z|^2)^\beta}, & si \quad \beta > 0. \end{cases}$$

Preuve

On pose $2\lambda = 2+\alpha+\beta$, si $\lambda \geq 0$ alors $\beta \geq 0$, l'intégral

$$I_{\alpha,\beta} \leq \frac{1}{(1-|z|^2)^\lambda}\int_{\mathbb{D}}(1-|w|^2)^\alpha dA(w),$$

qui converge pour $\alpha > -1$. si $\lambda < 0$, alors $\beta < 0$ nous avons aussi l'intégral $I_{\alpha,\beta}$ est convergent.

$$\frac{1}{|1-z\overline{w}|^{2\lambda}} = \Big|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(\lambda)(n!)}(z\overline{w})^n\Big|^2.$$

Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, $((z\overline{w})^k)_{k\geq 0}$ est une famille orthogonale dans $L^2(\mathbb{D}, dA)$ et $(1-|w|^2)^\alpha$ est une fonction radiale, donc

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &= \int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{2\lambda}}dA(w)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(n+\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)(n!)^2}|z|^{2n}\int_{\mathbb{D}}(1-|w|^2)^\alpha|w|^{2n}dA(w)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(n+\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)(n!)^2}|z|^{2n}\int_0^1(1-r)^\alpha r^n dr\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(n+\lambda)}{\Gamma^2(\lambda)(n!)^2}|z|^{2n}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+2)}\\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma^2(n+\lambda)}{\Gamma(n+\alpha+2)n!}|z|^{2n}.
\end{aligned}$$

Or d'après la formule de Stirling nous avons :

$$\frac{\Gamma^2(n+\lambda)}{\Gamma(n+\alpha+2)n!} \asymp (n+1)^{\beta-1}.$$

Alors si $\beta < 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{1-\beta}}|z|^{2n}$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc l'intégral $I_{\alpha,\beta}$ est convergent.

Si $\beta = 0$,

$$I_{\alpha,0}(z) \asymp \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}|z|^{2n} = \log\frac{1}{(1-|z|^2)}, \qquad |z| \to 1^-.$$

Si $\beta > 0$,

$$I_{\alpha,\beta}(z) \asymp \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{\beta-1}|z|^{2n} \asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^\beta}, \qquad |z| \to 1^-.$$

□

Espace de Hardy H^2

Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, soit $0 < r < 1$, on définit f_r par $f_r(e^{i\theta}) := f(re^{i\theta})$ la fonction est continue pour tout $0 < r < 1$ donc $f_r \in L^2(\mathbb{T}, \frac{1}{2\pi}d\theta)$. L'espace de Hardy H^2 est l'espace des fonctions $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ vérifiant :

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_r(e^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Par le Théorème de Subordination de Littlewood, on a

$$\|f\|_{H^2}^2 = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_r(e^{i\theta})|^2 d\theta < \infty.$$

Théorème 1.3.7. *Théorème de Fatou*

Si f est dans H^2 alors f admet une limite radiale presque partout sur le cercle unité.

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta}).$$

La fonction f^* est dans $L^2(\mathbb{T}, \frac{1}{2\pi}d\theta)$. Et $f \to f^*$ est une isométrie de $H^2 \to L^2(\mathbb{T}, \frac{1}{2\pi}d\theta)$, nous avons alors :

$$\|f\|_{H^2}^2 = \int_0^{2\pi} |f^*(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

On écrira $f(e^{i\theta})$ au lieu de $f^*(e^{i\theta})$. H^2 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta.$$

ou bien

$$\langle f, g\rangle_{H^2} = \sum_n a_n\overline{b_n}$$

où $f(z) = \sum_n a_n z^n$ et $g(z) = \sum_n b_n z^n$. La norme dans H^2 s'exprime alors par :

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_n |a_n|^2.$$

En utilisant le lemme suivant, nous pouvons donner une autre forme de la norme dans $H^2(\mathbb{D})$.

Lemme 1.3.8. *(Littlewood-Paley Identity) Soit $g \in L^1(\mathbb{T})$, si $g(0) = \int_{\mathbb{T}} g dm$ alors :*

$$2\int_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z) = \int_{\mathbb{T}} |g(z) - g(0)|^2 dm(z) = \int_{\mathbb{T}} |g(z)|^2 dm - |g(0)|^2.$$

$g(z)$ étant l'extension de Poisson de g .

Preuve

Supposons que $g(0) = 0$, dans le cas général on considère $f = g - g(0)$. Nous avons $\nabla = (\partial_x g; \partial_y g)$,

$$|\nabla g(z)|^2 = |\partial_x g(z)|^2 + |\partial_y g(z)|^2 = 2|\partial_z g(z)|^2 = 2|g^{'}(z)|^2$$

et

$$\Delta |g(z)|^2 = \Delta g(z)\overline{g(z)} = 4\partial_z \partial_{\overline{z}} g(z)\overline{g(z)} = 4|g^{'}(z)|^2 = 2|\nabla g(z)|^2$$

Soit $r < 1$, appliquons le théorème de Green à $u(z) = |g(z)|^2$ et $v(z) = \log \frac{r}{|z|}$ (v est une fonction harmonique). Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_{|z|<r} \Delta(u) v dx dy &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon < z < r} \Delta(u) v dx dy \\
&= \underbrace{\int_{|z|=r} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}) ds}_{I} - \underbrace{\lim_{\epsilon \to 0} \int_{|z|=\epsilon} (v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}) ds}_{J}
\end{aligned}$$

où n est la normale extérieure du disque de rayon r (respectivement de rayon ϵ), alors $ds = rd\theta$ (respectivement $\epsilon d\theta$).

Or

$$I = \int_{|z|=r} \log \frac{r}{|z|} v \frac{\partial u(z)}{\partial n} - |g(z)|^2 \frac{\partial}{\partial n} (\log \frac{r}{|z|}) ds = \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Pour $|z| < \frac{1}{2}$ alors $\nabla |g(z)|^2.n$ est borné, comme $g(0) = 0$. Alors

$$\begin{aligned}
J &= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|z|=\epsilon} \frac{|g(z)|^2}{\epsilon} - \log \frac{r}{\epsilon} \nabla |g(z)|^2.n ds \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|z|=\epsilon} \frac{|g(\epsilon e^{i\theta})|^2}{\epsilon} - \log \frac{r}{\epsilon} \nabla |g(z)|^2.n \epsilon d\theta = 0.
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue et faisant $r \to 1$, nous avons :

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla g(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_{\mathbb{T}} |g(z)|^2 dm(z)$$

□

Corollaire 1.3.9. *Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors*

$$\|f\|_{H^2} = |f(0)|^2 + 2 \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log \frac{1}{|z|} dA(z).$$

La preuve est immédiate, en remplaçant dans le lemme(1.3.8) $|\nabla g(z)|^2$ par $2|g^{'}(z)|^2$.

En posant $d\nu(z) = \log \frac{1}{|z|^2} dA(z)$, le produit scalaire sur H^2 s'exprime :

$$\langle f, g \rangle_{H^2} = f(0)\overline{g(0)} + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g^{'}(z)} d\nu(z), \qquad \forall\, f, g \in H^2. \tag{1.2}$$

$(z^k)_k$ est un système orthonormé de H^2 d'où l'existence du noyau reproduisant

$$K_w(z) = \frac{1}{1 - \overline{w}z} = \sum_k z^k \overline{w}^k$$

et

$$f(w) =< \langle f, K_w \rangle_{H^2}.$$

Par ailleurs, la fonctionnelle évaluation sur H^2 est continue. En effet, soit $f \in H^2$ alors

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(1 - |z|^2)^{\frac{1}{2}}} \|f\|_{H^2} \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Espace de Dirichlet à poids $\mathcal{D}_\alpha$.

L'espace $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{D}_\alpha(\mathbb{D})$, avec $0 < \alpha < 1$, est l'espace de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, défini par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \Big\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \mathcal{D}_\alpha(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty \Big\}.$$

La norme est donnée par

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} := |f(0)|^2 + \mathcal{D}_\alpha(f).$$

C'est aussi un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_\alpha} = \sum_n \frac{\Gamma(\alpha) n!}{\Gamma(n + \alpha)} a_n \overline{b_n}$$

où $f(z) = \sum_n a_n z^n$ et $g(z) = \sum_n b_n z^n$.

De façon que la norme associée à ce produit scalaire soit d'une part équivalente à la norme définie par l'intégral sur $\mathcal{D}_\alpha$ et d'autre part, nous donne pour noyau reproduisant K_w^α de la forme

$$K_w^\alpha(z) = \frac{1}{(1 - z\overline{w})^\alpha}$$

($\mathcal{D}_\alpha$ s'injecte continument dans A^2_α) Ainsi nous avons :

$$\|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} = \sum_{n \geq 0} (n+1)^{1-\alpha} |a_n|^2$$

Théorème 1.3.10. *(Beurling) Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha$, alors la limite non tangentielle $f^*(\zeta)$ existe pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$ sauf sur un ensemble de α-capacité nulle c'est-à-dire*

$$f^*(\zeta) = \lim_{r \to 1^-} f(re^{i\zeta}) \quad C_\alpha - p.p.$$

Les résultats suivants due à Beurling [3], montrent le lien entre l'espace de Dirichlet et la théorie de potentiel.

Théorème 1.3.11. *(inégalité faible de capacité) Soit $f \in \mathcal{D}$, alors $f^*(e^{i\theta}) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ existe quasi- partout : q.p (c.a.d que la limite non tangentielle existe sauf sur un ensemble de capacité logarithmique nulle), de plus on a*

$$C(|f|^* \geq t) \leq 16\frac{\|f\|_{\mathcal{D}}^2}{t^2} \quad avec \ \ (t \geq 4|f\|_{\mathcal{D}}).$$

La fonction limite radiale f^* satisfait à l'inégalité forte de capacité .

Théorème 1.3.12. *(inégalité forte de capacité .) Soit $f \in \mathcal{D}$ alors il existe $A > 0$ tel que*

$$\int_0^\infty C(|f|^* \geq t)tdt \leq A\|f\|_{\mathcal{D}}^2$$

Dans l'article [10] une nouvelle démonstration de ces théorèmes est donnée.

Espace de Dirichlet $\mathcal{D}$.

L'espace de Dirichlet classique $\mathcal{D}$ est l'espace de fonctions $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, telle que $f(z) = \sum_n a_n z^n$ vérifiant

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z) = \sum_n n|a_n|^2 < \infty$$

$\mathcal{D}(f)$ est appelé intégral de Dirichlet, $\mathcal{D}$ est un sous espace de l'espace de Hardy H^2 , donc c'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} = \sum_n (n+1)a_n\overline{b_n}$$

et dans ce cas la norme est :

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA(z).$$

Nous avons deux autres formules de l'intégral de Dirichlet. La première est de à Douglas [9]

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{is}) - f(e^{it})|^2}{|e^{is} - e^{it}|^2} dsdt.$$

La seconde formule est due à Carleson [5] en fonction de $|f^*|$ où f est une fonction extérieure.

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(|f(e^{is})|^2 - |f(e^{it})|^2)(\log|f(e^{is})| - \log|f(e^{it})|)}{|e^{is}-e^{it}|^2}dsdt$$

Le noyau reproduisant dans l'espace $\mathcal{D}$ est

$$K_w(z) = \frac{1}{\overline{w}z}\log\frac{1}{1-\overline{w}z}, \qquad w \neq 0,$$

et $K_0(z) = 1$.

Proposition 1.3.13. *Soient $w, z \in \mathbb{D}$ alors*

- $K_w(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{\overline{w}z)^n}{((1+n)}$, *ainsi $K_w \in \mathcal{D}$.*

- $f(w) = \langle f, K_w\rangle_{\mathcal{D}}$ *pour tout $f \in \mathcal{D}$.*

- $|f(w)| \leq \|f\|_{\mathcal{D}}\Big(\frac{1}{|w|^2}\log\frac{1}{1-|w|^2}\Big)^{\frac{1}{2}}$. *Donc w est un point d'évaluation dans $\mathbb{D}$.*

1.4 Opérateurs sur les espaces de fonctions analytiques.

Opérateurs compacts.

Notation : Soit H un espace de Hilbert séparable. On désigne par $\mathcal{L}(H)$ l'espace des opérateurs linéaire et continus de H dans H et par B_H la boule unité fermé de H.

Définition 1.4.1. *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est compact, si $T(B_H)$ est relativement compact.*

T est compact revient exactement à dire ceci : pour toute suite bornée (x_n) dans H, la suite image (Tx_n) admet des sous-suites convergentes dans H.

Le résultat suivant sera très utile par la suite :

Proposition 1.4.2. *(Relation entre compacité et convergence faible) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors nous avons les équivalences suivantes :*

- *T compact sur H*
- *Si $(f_n)_n$ est une suite dans H, qui converge faiblement vers zéro, alors $\|T(f_n)\|$ tend vers zéro.*

Théorème 1.4.3. *L'ensemble des opérateurs compacts $S_\infty(H)$ est un idéal fermé stable par $*$.*

1.4.1 Opérateurs dans les classes de Schatten.

Soit $T \in S_\infty(H)$ alors ils existent des nombres $s_0(T) \geq s_1(T) \geq .....$ appelés valeurs singulières de T tel que pour toutes familles orthonormées (e_n) et (f_n) on a :

$$Tx = \sum_n s_n(T)\langle x, e_n\rangle f_n \quad \forall x \in H$$

Soit $p > 0$, les classes de Schatten $S_p(H) := S_p$ définis par :

$$S_p = \{T \in \mathcal{L}(H) \quad \text{compact : } \sum_n s_n^p(T) < \infty\}.$$

Pour $p \geq 1$, S_p est un espace de Banach muni de la norme

$$\|T\|_{S_p} = \Big(\sum_n s_n^p(T)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus S_p est un idéal bilatéral de $\mathcal{L}(H)$. On appelle S_1(respectivement S_2) classe à trace (respectivement classe de Hilbert- Schmidt).

Soient $A \in S_1$, et (e_n) base orthonormée de H on appelle :

$$Tr(A) = \sum_n \langle Ae_n, e_n\rangle. \tag{1.3}$$

(1.3) est convergente indépendamment de choix de (e_n).

Si $T \in S_p$, T positif alors $\|T\|_{S_p} = Tr(T^p)$. Aussi si $T \in S_p$ alors $T^* \in S_p$ et $\|T^*\|_{S_p} = \|T\|_{S_p}$. Pour plus d'informations sur les classes de Schatten voir par exemple [38]. Si T est un opérateur compact sur H alors

$$T \in S_p \Leftrightarrow \quad T^*T \in S_{\frac{p}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \|T\|_{S_p}^p = \|T^*T\|_{S_{\frac{p}{2}}}.$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}
\|T^*\|_{S_p} &= \sup\big\{(\sum_n |\langle Te_n, e_n\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}; \quad \forall (e_n) \quad \text{base orthnormée de H}; \quad \forall p \geq 1\big\} \\
&= \sup\big\{(\sum_n \|Te_n\|^p)^{\frac{1}{p}}; \quad \forall (e_n) \quad \text{base orthonormée de H}; \quad \forall p \geq 2\big\}.
\end{aligned}$$

Opérateurs Toeplitz dans l'espace de Bergman à poids.

Soit $\alpha > -1$, P_α la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha)$ sur $\mathcal{A}_\alpha$ Alors

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}} dA_\alpha(w), \qquad z \in \mathbb{D}, \quad ; f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\alpha) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w) K_z^\alpha(w) dA_\alpha(w). \end{aligned}$$

Étant donné $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, on définit l'opérateur Toeplitz de symbole φ par

$$T_\varphi^\alpha(f) = P_\alpha(\varphi f), \qquad f \in \mathcal{A}_\alpha.$$

Nous avons alors $\|T_\varphi^\alpha\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Nous pouvons définir l'opérateur Toeplitz même si le symbole φ n'est pas borné ou bien pour une mesure Borélienne complexe, finie sur $\mathbb{D}$ par

$$T_\mu^\alpha(f)(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\bar{w}z)^{2+\alpha}} d\mu(w) = \int_{\mathbb{D}} f(w) K_w^\alpha(z) d\mu(w), \qquad f \in \mathcal{A}_\alpha.$$

En général T_μ^α n'est pas borné.

Dans le cas où $d\mu(z) = \varphi(z) dA_\alpha(z)$ pour $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$, T_μ^α est borné et $T_\mu^\alpha := T_\varphi^\alpha$.

Opérateur Toeplitz dans l'espace Hardy

Soit μ une mesure borélienne sur le cercle $\mathbb{T}$, alors

$$T_\mu f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{1 - ze^{-i\theta}} d\mu(\theta).$$

Alors T_μ est borné si, et seulement si $d\mu(\theta) = \varphi(\theta) d\theta$ où $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

$T_\mu$est compact si, et seulement $\mu = 0$.

Si $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$, soit T_φ (opérateur Toeplitz associé au symbole φ), définit par

$$T_\varphi(f)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)\varphi(\theta)}{1 - ze^{-i\theta}} d\theta \tag{1.4}$$

Alors T_φ est borné si, et seulement si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.

T_φ est compact si, et seulement si $\varphi = 0$

Transformation de Berezin

K. Zhu [38, 39] caractérise l'appartenance aux classes de Schatten pour l'opérateur Toeplitz(symbole $\mu > 0$) en terme de la transformation de Berezin, à travers laquelle il exprime la trace et donne des conditions nécessaires et suffisantes.

Définition 1.4.4. *Soit $\mathcal{H}$ un sous espace de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ à noyau reproduisant K_w; $w \in \mathbb{D}$. Soit $k_w = \frac{K_w}{\|K_w\|}$ le noyau reproduisant normalisé. La transformation de Berezin de T notée $\widetilde{T}$ est la fonction à valeurs dans $\mathbb{D}$ définie par :*

$$\widetilde{T}(w) = \langle Tk_w, k_w \rangle.$$

Alors $\widetilde{T}$ est borné et les propriétés de T se transforment à celles de $\widetilde{T}$. Si $T = T_\mu^\alpha$ alors $\widetilde{T^\alpha} := \widetilde{\mu^\alpha}$. La transformé de Berezin de μ est donnée par

$$\widetilde{\mu^\alpha}(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{4+2\alpha}} d\mu(w) = \frac{\langle T_\mu^\alpha K_z^\alpha, K_z^\alpha \rangle_{\mathcal{A}_\alpha}}{K_z^\alpha(z)}.$$

Si $T = T_\mu$(Hardy) alors $\widetilde{T} := \widetilde{\mu}$ et

$$\widetilde{\mu(z)} =< T_\mu k_z, k_z >_{H^2} = \frac{1-|z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\theta).}{|1-ze^{-i\theta}|^2} \tag{1.5}$$

(1.5) n'est rien d'autre que l'extension de Poisson de la mesure μ dans le disque $\mathbb{D}$.

Proposition 1.4.5. *Soit $d\lambda(z) := K(z,z)dA(z))$. Si $T \in S_1$ alors*

$$Tr(T) = \int_{\mathbb{D}} \widetilde{T}(z) d\lambda(z).$$

Preuve

La preuve résulte des égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
Tr(T) &= \sum_{n\geq 0} < Te_n, e_n > \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbb{D}} Te_n(z)\overline{e_n(z)} dA(z) \\
&= \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbb{D}} < Te_n, K_z > \overline{e_n(z)} dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} < T \sum_{n\geq 0} e_n \overline{e_n}, K_z > dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} < Tk_z, k_z > \|K_z\|^2 dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \widetilde{T}(z) K(z,z) dA(z).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.4.6. — *1) Si $T = T_\mu$; avec $\mu > 0$, on pose $\widetilde{T_\mu} := \widetilde{\mu}$ alors*

$$Tr(T_\mu) = \int_{\mathbb{D}} K(z,z)d\mu(z).$$

— *2) Si $T = T_\varphi$; avec $\varphi > 0$ et φdA ou φdA_α, on pose $\widetilde{T_\mu} := \widetilde{\varphi}$ alors*

$$Tr(T_\varphi) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(z)d\lambda(z).$$

— *3) Dans le cas d'espace de Bergman à poids (Hardy $\alpha = -1$) $K^\alpha(z,w) = \frac{1}{(1-z\overline{w})^{2+\alpha}}$; $d\lambda = K^\alpha(z,z)dA_\alpha = (1-|z|^2)^{-2}dA$: la mesure invariante de Möbius .*

Preuve

1)

$$\begin{aligned}
Tr(T_\mu) &= \int_{\mathbb{D}} \widetilde{\mu}(z)K(z,z)dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} K(z,z)dA(z) \int_{\mathbb{D}} |k_z(w)|^2 d\mu(w) \;\; \textit{Fubini} \\
&= \int_{\mathbb{D}} dA(z) \int_{\mathbb{D}} |K_z(w)|^2 d\mu(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} d\mu(w) \int_{\mathbb{D}} |K_z(w)|^2 dA(z) \\
&= \int_{\mathbb{D}} K(w,w)d\mu(w).
\end{aligned}$$

□

1.4.2 Mesure α -Carleson.

Définition 1.4.7. *Soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{D}$. μ est une mesure α- Carleson sur $\mathcal{A}_\alpha$ ($\alpha > -1$), s'il existe $C > 0$ tel que :*

$$\int_{\mathbb{D}} | f(z) |^2 \, d\mu(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} | f(z) |^2 \, dA_\alpha(z) \tag{1.6}$$

μ est dite mesure α- Caleson nulle sur le bord si l'injection I_α est compact.

(1.6) est équivalente à dire que l'injection $I_\alpha : \mathcal{A}_\alpha \to L^2(\mu)$ est continue.

Dans le cas de l'espace de Bergman ($\alpha = 0$), μ est dite mesure de Carleson respectivement Carleson nulle sur le bord.

Proposition 1.4.8. *Soit μ une mesure finie positive définie sur $\mathbb{D}$. Pour $|\zeta| = 1$ et $0 < \delta < 2$, $S(\zeta, \delta) = \{z \in \mathbb{D} : |z - \zeta| < \delta\}$ est l'ensemble de Carleson . Soit $\alpha > -1$, on dit que μ est une mesure $\alpha-$Carleson s'il existe une constante C telle que $\mu(S(\zeta, \delta)) \leq C\delta^{\alpha+2}$ pour tout ζ, δ. La mesure est dite $\alpha-$Carleson nulle sur le bord si*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{|\zeta|=1} \frac{\mu(S(\zeta, \delta))}{\delta^{\alpha+2}} = 0.$$

Remarque 1.4.9. *L'opérateur Toeplitz $T_\mu(\mu \geq 0)$ est borné dans $\mathcal{A}_\alpha$ si, et seulement si μ est α- Carleson.*

Théorème 1.4.10. *On suppose que μ mesure positive sur $\mathbb{D}$; $p > 0$, $\alpha > -1$ alors*

- *i) T_μ est borné dans $\mathcal{A}_\alpha$ si, et seulement si $\widetilde{\mu}$ est bornée dans $\mathbb{D}$.*
- *ii) T_μ est compact dans $\mathcal{A}_\alpha$ si, et seulement si $\widetilde{\mu}$ est α-Carleson nulle sur $\mathbb{T}$.*
- *iii)T_μ est dans $S_p(A_\alpha)$ si, et seulement si $\widetilde{\mu}$ est dans $L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.*

Chapitre 2

Étude des opérateurs de composition

Dans ce chapitre on s'intéresse aux opérateurs de compositions associées à des fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{D}$ dans lui même. Nous étudierons les principales propriétés de ces opérateurs : bornitude , compacié et appartenance dans les classes de Schatten dans les espaces $H^2, \mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{D}_\alpha$.

Définition 2.0.11. *Soit φ une fonction analytique, $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Nous définissons C_φ par :*

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi$$

pour tout f appartenant à un certain espace de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.

2.1 Continuité de l'opérateur de composition.

La continuité de l'opérateur C_φ sur les espaces de Hardy et les espaces de Bergman à poids est due au principe de subordination de Littlewood.

Définition 2.1.1. *Soient f et g fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$, f est subordonnée à g s'il existe une fonction analytique $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ telle que $\Phi(0) = 0$ et $f = g \circ \Phi$.*

Théorème 2.1.2. *(principe de subordination de Littlewood) Si $f, g \in H^2$, f subordonné à g alors $\|f\|_{H^2} \leq \|g\|_{H^2}$.*

Proposition 2.1.3. *Pour tout φdans H^2, l'opérateur C_φ est borné dans H^2 et*

$$\|C_\varphi\|_{H^2} \leq \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}$$

Preuve

On suppose que $\varphi(0) = 0$. En appliquant le théorème 2.1.2 à $f = C_\varphi g$, nous avons $\|C_\varphi g\|_{H^2} \leq \|g\|_{H^2}$. Ainsi $\|C_\varphi\|_{H^2} \leq 1$, donc l'opérateur est borné dans H^2. Si $\varphi(0) = a$, on considère alors la fonction transformation conforme de $\mathbb{D}$ définie par $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ on a $\varphi_a^{-1}(z) = \varphi_a(z)$, soit $\Psi = \varphi_a o \varphi$ alors $\Psi(0) = 0$ et $C_\varphi = C_\Psi C_{\varphi_a}$ donc $\|C_\varphi\|_{H^2} \leq \|C_{\varphi_a}\|_{H^2}$.

Lemme 2.1.4. *Soit $a \in \mathbb{D}$ alors l'opérateur C_{φ_a} est borné dans H^2. De plus on a :*

$$\|C_{\varphi_a}\| \leq \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}$$

Preuve

Soit $f \in H^2$

$$\begin{aligned}
\|f \circ \varphi_a\|_{H^2}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\varphi_a(e^{i\theta}))|^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 |\varphi_a^{'}(e^{it})| dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{it}|^2} dt \\
&\leq \frac{1-|a|^2}{(1-|a|)^2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt\right) \\
&\leq \frac{1+|a|}{(1-|a|)}\|f\|_{H_2}^2.
\end{aligned}$$

□ Le résultat suivant découle du lemme 2.1.4 .

Remarque 2.1.5. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique tel que $\varphi(0) = 0$ alors $\|C_\varphi\|_{H^2} = 1$. En effet on a $C_\varphi 1 = 1$ donc $\|C_\varphi\| \geq 1$. d'un autre coté d'après le Lemme 2.1.4 $\|C_\varphi\| \leq 1$. D'où l'égalité.*

Proposition 2.1.6. *Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ alors :*

$$\frac{1}{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}} \leq \|C_\varphi\|.$$

Preuve

Nous avons $C_\varphi^* K_w = K_{\varphi(w)}$. En effet pour $f \in H_2(\mathbb{D})$,

$$\begin{aligned}\langle f, C_\varphi^* K_w\rangle_{H_2} &= \langle C_\varphi f, K_w\rangle_{H_2}\\ &= \langle f\circ\varphi, K_w\rangle_{H_2}\\ &= f(\varphi(x))\\ &= \langle f, K_{\varphi(w)}\rangle_{H_2}.\end{aligned}$$

$C_\varphi^* K_0 = K_{\varphi(0)}$ comme $\|K_w\|^2_{H^2} = \frac{1}{1-|w|^2}$ alors $\|K_{\varphi(0)}\|^2_{H_2} = \frac{1}{1-|\varphi(0)|^2}$ et $\|k_0\|_{H^2} = 1$. D'autre part $\|C_\varphi^* K_0\|^2_{H_2} = \|C_\varphi K_0\|^2 \leq \|C\varphi\|^2 \|K_0\|^2_{H^2}$, par conséquent $\|C\varphi\|^2 \geq \frac{1}{1-|\varphi(0)|^2}$.$\square$

En utilisant le Théorème de Subordination de Littlewood nous avons :

Proposition 2.1.7. *Pour $\alpha > -1$, et tout φ dans $\mathcal{A}_\alpha$ l'opérateur C_φ est borné dans $\mathcal{A}_\alpha$.*

Preuve

Soient $a = \varphi(0)$, $\Psi(z) = \varphi_a o \varphi(z)$ Ψ est analytique vérifiant $\Psi(0) = 0$. D'après le principe subordination de Littlewood nous avons

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(\varphi_a(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

En multipliant par $(1-r^2)^\alpha r dr$ avec$0 \leq r < 1$ et en intégrant de chaque coté , on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f\varphi(z)|^2 dA_\alpha &\leq \int_{\mathbb{D}} |f\varphi_a(z)|^2 dA_\alpha\\ &= \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 |\varphi_a'(z)|^2 (1-|\varphi_a(z)|^2)^\alpha (1+\alpha) dA(z)\\ &\leq \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 (\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2})^2 (\frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{a}z|^2})^\alpha (1+\alpha) dA(z)\\ &\leq \frac{(1-|a|^2)^{2+\alpha}}{(1-|a|)^{4+2\alpha}} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA_\alpha\\ &= \left(\frac{1+|a|}{1-|a|}\right)^{2+\alpha} \|f\|^2_{A^2_\alpha}.\end{aligned}$$

$\square$

Dans le cas de l'espace de Dirichlet à poids $\mathcal{D}_\alpha$ pour $0 \leq \alpha < 1$, une condition nécessaire pour que C_φ soit borné est que $\varphi \in \mathcal{D}_\alpha$. En effet soit $g(z) = z$, si C_φ est borné alors $C_\varphi g = \varphi$. La réciproque est fausse, un exemple est donné dans [18]. Quelles sont les fonctions φ dans l'espace $\mathcal{D}_\alpha$ pour lequel l'opérateur C_φ est borné ? La réponse à cette question précédente est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.1.8. *[30] On suppose que $\alpha > -1$, on pose $d\mu_\alpha = |\varphi'|^2 dA_\alpha$ alors l'opérateur C_φ est borné sur $\mathcal{D}_\alpha$ si et seulement si $\mu_\alpha \varphi^{-1}$ est une mesure $\alpha-$Carleson dans $\mathbb{D}$.*

Preuve

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure positive μ soit $\alpha-$Carleson est que la fonction identité $I_\alpha : \mathcal{A}_\alpha \to L^2(\mu)$ est continue. C'est-à-dire : il existe $C > 0$, tel que pour tout $f \in \mathcal{A}_\alpha$,

$$\int_{\mathbb{D}} |f|^2 d\mu \leq C\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} \tag{2.1}$$

Or si $f \in \mathcal{D}_\alpha$ alors $f' \in \mathcal{A}_\alpha$, soit $g \in \mathcal{D}_\alpha$ telle que $f' = g$. D'après (2.1) on a :

$$\int_{\mathbb{D}} |g|^2 d\mu \leq C\|g\|_{\mathcal{A}_\alpha} \quad \forall \quad g \in \mathcal{D}_\alpha. \tag{2.2}$$

On suppose que φ n'est pas constante. Supposons que C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$. Soit $f \in \mathcal{D}_\alpha$ vérifiant $f(0) = 0$. alors

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi^{'}(z)^2 dA_\alpha \leq C \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha$$

Par un changement de variable on a :

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(\varphi(z))|^2 |\varphi^{'}(z)|^2 dA_\alpha = \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 d\mu_\alpha(\varphi^{-1})(z).$$

Soit $g \in \mathcal{D}_\alpha$ telle que $f(z) = \int_0^z g(v)dv$, en remplaçant dans l'equation précédente et d'après (2.2)

$$\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 d\mu_\alpha(\varphi^{-1})(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^2 dA_\alpha.$$

il s'ensuit que $\mu_\alpha \varphi^{-1}$ est une mesure $\alpha-$Carleson dans $\mathbb{D}$.

Inversement, on suppose que $\mu_\alpha \varphi^{-1}$ est une mesure $\alpha-$Carleson dans $\mathbb{D}$.

$$\begin{aligned} \|C_\varphi f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha} &= \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 d\mu_\alpha(\varphi^{-1})(z) + |\varphi(0)|^2 \\ &\leq C \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) + |\varphi(0)|^2 \\ &= C^{'} \|f\|^2_{\mathcal{D}_\alpha}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est due au fait que l'évaluation fonctionnelle en 0 définie de $\mathcal{D}_\alpha \to \mathbb{C}$ est continue donc $|\varphi(0)| \leq A\|\varphi\|_{\mathcal{D}_\alpha}$.□

2.2 Opérateurs de composition compacts.

Une condition nécessaire pour que C_φ définisse un opérateur compact dans l'espace de Hardy(voir [35, 36, 30]) est que :

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty. \tag{2.3}$$

La compacité de C_φ dans H^2 implique (2.3), mais ce n'est pas une condition suffisante que si φ est univalente. La condition (2.3) signifie que $\varphi(z)$ s'approche du bord de $\mathbb{D}$ moins vite que z, et que φ n'admet de dérivée angulaire en aucun point de $\partial\mathbb{D}$. On rappelle que φ admet une dérivée angulaire finie en w dans $\partial\mathbb{D}$ si la limite angulaire(ou bien limite non tangentielle) $\angle \lim_{z\to w} f(z) = \eta$ $(\eta \in \mathbb{T})$ et $\angle \lim_{z\to w} \frac{f(z)-\eta}{z-w}$ existent($z \to w$ dans un secteur de sommet w) . Le théorème de Julia-Caratheodory donne l'équivalence entre l'inexistence d'une telle dérivée et (2.3).

Théorème 2.2.1. *[30] Soit $\alpha > -1$ alors*

$$C_\varphi \colon \mathcal{A}_\alpha \to \mathcal{A}_\alpha \textit{ compact} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{|z| \lesssim 1} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty. \tag{2.4}$$

$$C_\varphi \colon \mathcal{D}_\alpha \to \mathcal{D}_\alpha \textit{ compact} \quad \Rightarrow \quad \lim_{|z| \lesssim 1} \frac{1-|\varphi(z)|}{1-|z|} = \infty. \tag{2.5}$$

on peut en déduire que C_φ est compact implique que $1-|z| = o(1-|\varphi(z)|$ quand $|z| \to 1^-$, nous avons l'équivalence seulement pour l'espace de Bergman à poids. Pour l'espace de Hardy , un contre exemple est donné dans[30] et un autre dans [36]. Pour l'espace $\mathcal{D}_\alpha$ en plus de (2.5) il faut que C_φ soit borné sur $\mathcal{D}_\gamma$ pour $\gamma < 1$ voir la démonstration dans [30]. Soit $E \subset \mathbb{T}$, on note par $|E|$ la mesure de Lebesgue de E, par $E_\varphi(s) = \{\zeta \in \mathbb{T}, |\varphi(\zeta)| \geq s\}$, et $E_\varphi(1) := E$. on a :

$$C_\varphi \colon H_2 \to H^2 \text{ compact} \quad \Rightarrow \quad |E| = 0. \tag{2.6}$$

En effet, supposons que $|E| > 0$, soit $e_n(z) = z^n$ alors la suite (e_n) converge uniformément vers zéro sur tout compact de $\mathbb{D}$. Or

$$\begin{aligned}\|C_\varphi(e_n(z))\|_{H^2}^2 &= \|\varphi^n\|_{H^2}^2\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi^{2n}(e^{i\theta})|d\theta\\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_E|\varphi^{2n}(e^{i\theta})|d\theta\\ &= \frac{1}{2\pi}|E|.\end{aligned}$$

$\|C_\varphi e_n\|_{H^2}^2$ ne tend pas vers zéro, donc d'après la proposition (1.4.2) C_φ n'est pas compact.

Nous avons deux autres caractérisations de la compacité de l'opérateur de composition, en effet deux points de vue différents, un utilise les mesures de Careleson, l'autre utilise les fonctions de comptage de Nevanlinna.

Définition 2.2.2. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ analytique. la fonction de comptage de Nevanlinna est définie par :*

$$N_\varphi(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{w\in\mathbb{D}\ :\ \varphi(w)=z} \log\frac{1}{|w|}, & si\ \ z \in \mathbb{D}\backslash\{\varphi(0)\}\,; \\ 0, & si\ z \notin \varphi(\mathbb{D}). \end{cases}$$

Chaque terme $\log\frac{1}{|w|}$ est compté suivant la multiplicité de w.

Proposition 2.2.3. *Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, analytique et non constante alors pour tout $f \in H^2$ nous avons :*

$$\|f\circ\varphi\|_{H^2}^2 = |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\varphi(\mathbb{D})}|f'|^2 N_\varphi dA$$

Preuve

En utilisant le corollaire 1.3.9 nous avons :

$$\begin{aligned}\|f\circ\varphi\|_{H^2}^2 &= |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}}|(f\circ\varphi)'(z)|^2\log\frac{1}{|z|}dA(z)\\ &= |f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}}|(f\circ\varphi)(z)|^2|\varphi'(z)|^2\log\frac{1}{|z|}dA(z).\end{aligned}$$

Soit $U = \{z \in \mathbb{D}; \varphi'(z) \neq 0\}$ l'ouvert alors il existe une famille dénombrable de pavés (R_j) disjoints deux à deux tel que $U = \cup_j Rj$ et $\varphi|_{R_j}$ est injective. Soit ψ_j l'inverse de φ définie de $\varphi(R_j) \to R_j($ ψ_j est injective). Posons $z = \psi_j(w)$ alors

$$\int_{R_j}|(f\circ\varphi)(z)|^2|\varphi'(z)|^2\log\frac{1}{|z|}dA(z) = \int_{\varphi(R_j)} f(w)\log\frac{1}{|\psi_j(w)|}dA(w).$$

Soit χ_i la fonction caractéristique de $\varphi(R_j)$ alors

$$\begin{aligned}\int |fo\varphi(z)|^2|\varphi^{'}(z)|^2 \log\frac{1}{|z|}dA(z) &= \sum_j \int_{\varphi(R_j)} f(w)\log\frac{1}{|\psi_j(w)|}dA(w)\\ &= \int_{\varphi(\mathbb{D})} f(w)\sum_j \chi_j(w)\log\frac{1}{|\psi_j(w)|}dA(w)\end{aligned}$$

$$N_\varphi(w) = \sum_j \chi_j(w)\log\frac{1}{|\psi_j(w)|} = \sum_{\varphi(z)=w}\log\frac{1}{|z|} \quad p.p$$

□

Pour l'espace de Hardy, Shapiro dans [35] donne une caractérisation très intéressante de la compacité comme suit :

Théorème 2.2.4.

$$C_\varphi\colon H^2 \to H^2 \ \textit{compact} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{|z|\overset{<}{\to}1}\frac{N_\varphi(z)}{\log\frac{1}{|z|}} = 0. \tag{2.7}$$

Nous savons que

$$N_\varphi(z) = O\Big(\log\frac{1}{|z|}\Big) \quad |z|\to 1^- \tag{2.8}$$

si $\varphi(0)=0$, c'est alors le lemme de Schwartz. D'après Littlewood, si $\varphi\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ et $\varphi(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$ (2.8) est vraie dans le cas général (voir [25]). Comme nous avons $2\log\frac{1}{|z|}\asymp(1-|z|^2) \quad (|z|\to 1^-)$ (2.8) devient $N_\varphi(z)=O(1-|z|^2)$.

La fonction de comptage de Nevanlinna dans $\mathcal{D}_\alpha$ s'écrit :

$$N_{\varphi,\alpha}(z) = \sum_{w\in\mathbb{D}\,:\,\varphi(w)=z}(1-|w|^2)^\alpha, \qquad (z\in\varphi(\mathbb{D})). \tag{2.9}$$

En faisant un changement de variable dans l'intégral $\mathcal{D}_\varphi C\varphi f$, on obtient :

$$\mathcal{D}_\alpha C_\varphi f = \int_{\varphi(\mathbb{D})}|f'(z)|^2 N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z). \tag{2.10}$$

En utilisant (2.10), N.Zorboska dans [40] a montré que pour $\varphi\in\mathcal{D}_\alpha$ avec $0\le\alpha<1$, C_φ est borné dans $\mathcal{D}_\alpha$ si et seulement si $d\mu_{\varphi,\alpha}=N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z)$ est une mesure de Carleson sur cA_α.

C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha$ si et seulement si $d\mu_{\varphi,\alpha}=N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z)$ est une mesure $\alpha-$ Carleson sur $\mathcal{A}_\alpha$.

De même McCluer-Shapiro (voir [30]) ont montré que C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha$ si et seulement si $d\mu_{\varphi,\alpha}=|\varphi'|^2dA_\alpha\varphi^{-1}$ est une mesure $\alpha-$ Carleson sur $\mathcal{A}_\alpha$.

Par ailleurs K.Kellay et P.Lefévre [Theorem 1.4] [19] ont montré un résultat similaire à celui de Shapiro : C_φ est compact dans $\mathcal{D}_\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ si et seulement si

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{N_{\varphi,\alpha}(z)}{(1-|z|^2)^\alpha} = 0.$$

2.3 Opérateurs de composition dans les classes de Schatten.

2.3.1 Opérateurs à trace.

Nous allons utiliser le critère d 'appartenance des opérateurs à trace finie pour les opérateurs Toeplitz ayant une mesure positive pour symbole , définis sur certains espaces de Hilbert de fonctions analytiques sur le disque. Cette technique a été développée initialement par D. H. Luecking [29] aussi par K. Zhu [38, 39].

D. H. Luecking [29] a pu étendre la notion d'opérateur Toeplitz dont le symbole est une mesure bien déterminée aussi donne des conditions nécessaires et suffisantes pour appartenir aux classes de Schatten en termes de décomposition dyadique du disque.

Afin d'indiquer les résultats principaux de [29], nous avons besoin d'introduire quelques notations. Pour $\alpha < 1$, on considère l'espace de Hilbert

$$H_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \sum_n (n+1)^\alpha |a_n|^2 < \infty \right\}.$$

$\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha < 0$ correspondent respectivement à l'espace de Hardy H^2, l'espace de Bergman $\mathcal{A}$ et l'espace Bergman à poids $\mathcal{A}_{-1-\alpha}$. Soit $f \in H_\alpha$ alors

$$\|f\|^2_{H_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA_{-\alpha-1}.$$

Le noyau reproduisant associé à H_α est

$$K^\alpha_w(z) = K^\alpha(z,w) = (1 - z\overline{w})^{\alpha-1}.$$

Nous avons vu dans (1.3) que pour tout $f \in L^2(\mathbb{D}, dA_\beta)$ $(\beta = -1-\alpha;\ \alpha < 0)$, nous avons :

$$P_\beta(f)(z) = \int_{\mathbb{D}} K^\beta(w,z) f(w) dA_\beta(w),$$

où P_β est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{D}, dA_\beta)$ sur $\mathcal{A}_\beta$. Nous allons généraliser cette notion au cas d'une mesure, en posant

$$T_\mu(f)(z) = \int_{\mathbb{D}} K^\beta(w,z)f(w)d\mu(w).$$

Si $d\mu = \varphi dA_\beta$ alors $T\mu := T_\varphi$ et $T_\varphi(f) = P_\beta(\varphi f) \quad \forall f \in \mathcal{A}_\beta$. Plus tard Nous verrons La relation entre l'opérateur Toeplitz Dans l'espace de Bergman à poids et l'opérateur de composition dans $\mathcal{D}_\alpha$.

Ceci nous incite aussi à définir l'opérateur Toeplitz sur H_α avec une mesure comme symbole.

Soit μ une mesure positive, finie sur $\mathbb{D}$. On définit l'opérateur Toeplitz sur H_α par :

$$T_\mu f(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(z)}{(1-w\overline{z})^{1-\alpha}} d\mu(z) \quad \forall f \in H_\alpha.$$

Puisque

$$\langle T_\mu f, g\rangle = \int f(z)\overline{g}(z)d\mu(z), \qquad f, g \in H_\alpha,$$

alors T_μ est borné sur H_α si et seulement si

$$\int |f(z)|^2 d\mu \leq C\|f\|^2_{H_\alpha}$$

c'est-à-dire que μ est une mesure de Carleson pour H_α. En effet, les propriétés de T_μ, notamment la continuité et la compacité se transforment en conditions sur μ. En général T_μ n'est pas borné sur H_α. Cet opérateur n'admet pas de relation avec l'opérateur Toeplitz classique (cas de l'espace de Hardy).

La décomposition dyadique est la décomposition du disque en un ensemble disjoint de taille égale. On considère un sous-arc $I \subset \mathbb{T}$ de longueur $|I|$. Le carré de Carleson est,

$$S(I) := \{z = r\xi \in \mathbb{D} : \xi \in I \text{ et } 1 - \frac{|I|}{2\pi} \leq r < 1\}.$$

$$R(I) := \{z = r\xi \in \mathbb{D} : \xi \in \mathbb{T} \text{ et } 1 - \frac{|I|}{2\pi} \leq r < 1 - \frac{|I|}{4\pi}\}.$$

On considère les dyadiques sous-arcs

$$I_{n,k} := \{\xi \in \mathbb{T} : \frac{2k\pi}{2^n} \leq \arg\xi < \frac{2(k+1)\pi}{2^n}\} \quad n \geq 0, \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, 2^n - 1$$

et on pose

$$R_{n,k} = \{z = r\xi \in \mathbb{D} : 2^{-n-1} \leq 1 - r < 2^{-n}, \quad \xi \in I_{n,k}\}.$$

Alors

$$\mathbb{D} \subset \cup_{n,k} R_{n,k}.$$

Nous sommes alors en mesure d'énoncer le théorème principal de D. H. Luecking [29]

Théorème 2.3.1. *Soit $p > 0$,$\alpha < 1$ tels que $p\alpha < 1$ alors*

$$T_\mu \in \mathcal{S}_p(H_\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n,k} \left(\mu(R_{n,k})[l(R_{n,k})]^{\alpha-1}\right)^p < \infty \tag{2.11}$$

De plus

$$\|T_\mu\|_{S_p}^p \asymp \sum_{n,k} \left(\mu(R_{n,k})[l(R_{n,k})]^{\alpha-1}\right)^p.$$

Nous allons voir qu'il existe une relation étroite entre opérateur de composition et opérateur de Toeplitz. En effet, pour tout $f \in H_\alpha$, nous avons

$$\begin{aligned}
C_\varphi^* C\varphi f(w) &= \langle C_\varphi f, C_\varphi K_w^\alpha \rangle_{H_\alpha} \\
&= \langle f\varphi, K_w^\alpha \varphi \rangle_{H_\alpha} \\
&= \int_{\mathbb{D}} f(z)\varphi(z)(1 - w\overline{\varphi}(z))^{\alpha-1} dA_\beta(z) \\
&= \int f(z)(1 - w\overline{z})^{\alpha-1} d\lambda_{\varphi,\alpha}(z) \\
&= T_\mu(f)(w).
\end{aligned}$$

où $d\lambda_{\varphi,\beta} = dA_\beta(\varphi)^{-1}$ est la mesure pull-back de A_β introduite par φ dans l'espace de Bergman à poids pour $\beta = -\alpha - 1;\ \alpha < 0$. Dans le cas de l'espace de Hardy, $d\lambda_{\varphi,0} = dm(\varphi^*)^{-1} := dm_\varphi$ avec m est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ et φ^* la limite non tangentielle de φ .

Considérons $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tel que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

Si $\alpha = 0$ alors $H_\alpha = H^2$; $C_\varphi \in \mathcal{S}_p$ si et seulement si $C_\varphi^* C_\varphi = T_{m_\varphi}$ appartient à $\mathcal{S}_{\frac{p}{2}}$. Sachant que $l(I_{n,k}) \asymp l(R_{n,k}) \asymp 2^{-n}$.

Corollaire 2.3.2.

$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p(H^2) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} 2^{np} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(m_\varphi(R_{n,k})\right)^{\frac{p}{2}} < \infty. \tag{2.12}$$

D'après (2.12), nous avons $\lim_{n\to\infty} \max_k 2^n m_\varphi(R_{n,k}) = 0$, alors $m_\varphi(\mathbb{T}) = 0$, ou bien $|\varphi^*| < 1$ presque partout $\mathbb{T}$. Cette condition est nécessaire pour que C_φ soit compact(2.6) .

Dans le cas $\alpha < 0$ alors $H_\alpha = \mathcal{A}_{-1-\alpha}$, on pose $\beta = -1 - \alpha$ d'après (2.11)nous déduisons que

Corollaire 2.3.3. *Soient $\beta > -1$, $p > 0$*

$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} 2^{(3+\beta)\frac{np}{2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\lambda_{\varphi,\beta}(R_{n,k}\right)^{\frac{p}{2}} < \infty. \tag{2.13}$$

Soit maintenant $0 < \alpha < 1$; $\beta = 1-\alpha$, alors H_α s'identifie à $\mathcal{D}_\beta$. Sachant que $\mathcal{D}_\beta(f) = \int |f'|^2 dA_\beta$, nous pouvons introduire un autre produit scalaire (équivalent au premier) sur $\mathcal{D}_\beta$ par :

Soient $f, g \in \mathcal{D}_\beta$

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}_\beta} = f(0)\overline{g}(0) + \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{g'(z)}dA_\beta(z).$$

$$\begin{aligned}
\langle C_\varphi^* C_\varphi f, g\rangle_{\mathcal{D}_\beta} &= \langle C_\varphi f, C_\varphi g\rangle_{\mathcal{D}_\beta} \\
&= f(\varphi(0))\overline{g(\varphi(0))} + \int (f\circ\varphi)'(z)\overline{(g\circ\varphi)'(z)}dA_\beta(z) \\
&= f(\varphi(0))\overline{g(\varphi(0))} + \int f'(z)\overline{g'(z)}(|\varphi'(z)|^2 dA_\beta)(\varphi)^{-1}(z) \\
&= f(\varphi)(0)\overline{g(\varphi(0))} + \langle T_{\mu_{\varphi,\beta}} f', g'\rangle_{\mathcal{A}_\beta}.
\end{aligned}$$

où

$$\mu_{\varphi,\beta}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} |\varphi'(z)|^2 dA_\beta(z) \quad \forall E \subset \mathbb{D}.$$

Remarques 2.3.4. — *Si $f \in \mathcal{D}_\alpha$ alors $f' \in \mathcal{A}_\alpha$.*

— $\mathcal{A}_\beta = H_{-\beta-1} = H_{\alpha-2}$.

— *D'après la proposition* (2.1.8), *C_φ est borné $\mathcal{D}_\beta$ si et seulement si $\mu_{\varphi,\beta}$ est mesure de Carleson sur $\mathbb{D}$ pour $\mathcal{A}_\beta$.*

Considérons D l'opérateur dérivé $Df = f'$ tel que $D^{-1}f(z) = \int_0^z f(v)dv$, et

$$\mathcal{D}_\beta^0 := \{f \in \mathcal{D}_\beta;\ f(0) = 0\}.$$

Si $\varphi(0) = 0$, alors $\mathcal{D}_\beta^0$ est un sous espace invariant pour C_φ et D et D^{-1} définissent un isomorphisme de $\mathcal{D}_\beta^0$ sur $H_{\alpha-2}$. De plus $C_\varphi^* C_\varphi|_{\mathcal{D}_\beta^0} = D^* T_{\mu_{\varphi,\beta}} D|_{\mathcal{D}_\beta^0}$. Nous déduisons que $C_\varphi^* C_\varphi \in \mathcal{S}_{\frac{p}{2}}(D_\beta^0)$ si et seulement si $T_{\mu_{\varphi,\beta}} \in S_{\frac{p}{2}}(H_{\alpha-2})$.

Si $\varphi(0) = a$, soit $\psi = \varphi_a \varphi$ alors $\varphi(0) = 0$ et $C_\varphi = C_\psi C_{\varphi_a}$ comme $C_{\varphi_a}^{-1} = C_{\varphi_a}$. Sachant que $\mathcal{D}_\beta^0$ est de codimension un dans $\mathcal{D}_\beta$, alors si $C_\psi \in S_p(\mathcal{D}_\beta^0)$ si et seulement si $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\beta)$. Ainsi, pour $C_\varphi^* C_\varphi = D^* T_{\mu_{\varphi,\beta}} D + B$, la conclusion est la même.

Corollaire 2.3.5. *Soient $p > 0$, $0 < \beta < 1$ alors*

$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\beta) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} 2^{(3+\beta)\frac{np}{2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} \big(\mu_{\varphi,\beta}(R_{n,k}\big)^{\frac{p}{2}} < \infty. \tag{2.14}$$

En utilisant (2.14) K.J. Wirths, J. Xiao [37] donnent le résultat suivant trés utile par la suite.

Théorème 2.3.6. *Soient $\alpha > -1$, p>0. on pose :*

$$\tau(w, z, \epsilon) = \frac{(1-|w|^2)^\epsilon}{|1-\overline{w}z|^{1+\epsilon}}.$$

$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{D}} \Big(\int_{\mathbb{D}} \tau(w, \varphi(z), \epsilon)^{2+\alpha} |\varphi^{'}(z)|^2 dA_\alpha(z) \Big)^{\frac{p}{2}} \frac{dA(w)}{(1-|w|^2)^2} < \infty. \tag{2.15}$$

$\forall \epsilon > \max\{\frac{1}{(2+\alpha)}, \frac{2}{(2p+p\alpha)}\}$.

Le résultat (2.15)peut être exprimé en terme de Nevanlinna (2.9)par :

$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{D}} \Big(\int_{\mathbb{D}} \tau(w, z, \epsilon)^{2+\alpha} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \Big)^{\frac{p}{2}} \frac{dA(w)}{(1-|w|^2)^2} < \infty. \tag{2.16}$$

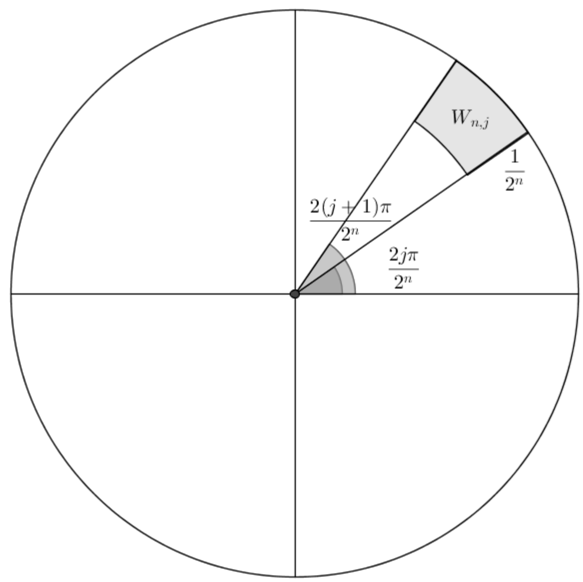
D'après lemme (1.4.10), nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.3.7. *[26] Soient $\alpha > -1$, $p \geq 1$ alors*

$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p(H^2) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N_\varphi(w)}{-\log|z|} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda).$$

$$C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{A}_\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{N_{\varphi,\alpha+2}(w)}{(\log\frac{1}{|z|})^{\alpha+2}} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda).$$

Nous pouvons donner une autre façon de caractériser l'appartenance aux classes de Schatten pour les opérateur de composition en utilisant les fenêtres de Carleson et la mesure pull-back. Dans [23], ils ont donnés une relation entre la fonction de Nevanlinna N_φ et la fonction de Carleson ρ_φ. Pour $\xi \in \mathbb{T}$ et $0 < h < 1$, la fenêtre de Carleson est l'ensemble $W(\xi, h) = \{z \in \mathbb{D}\,;\ |z| \geq 1-h$ et $|\arg(z\,\bar{\xi}| \leq h\}$.



Soient $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ fonction analytique, $0 < h < 1$, la fonction de Carleson ρ_φ est définie par :

$$\rho_\varphi(h) = \sup_{\xi \in \mathbb{T}} m\big(\{e^{i\theta} \in \mathbb{T}\,;\ \varphi^*(e^{i\theta}) \in W(\xi, h)\}\big)\,.$$

Alors $\rho_\varphi(h) = \sup_{\xi \in \mathbb{T}} m_\varphi[W(\xi, h)]$, où m_φ est est la mesure pull-back de m par φ. Pour notre travail nous utiliserons les fenêtres de Carleson.

Chapitre 3

Points de contact et les Opérateurs de Composition dans les classes de Schatten

Contact points and Schatten composition operators [1]

Abstract. We study composition operators on Hardy and Dirichlet spaces belonging to Schatten classes. We give some new examples and analyse the size of contact set of the symbol of such operators.

3.1 Introduction

In this paper, we consider composition operators acting on Hardy and weighted Dirichlet spaces. Let $\mathbb{D}$ be the unit disc. Let $dA(z) = dxdy/\pi$ denote the normalized area measure on $\mathbb{D}$. For $\alpha > -1$, dA_α will denote the finite measure on the unit disc $\mathbb{D}$ given by

$$dA_\alpha(z) := (1+\alpha)(1-|z|^2)^\alpha dA(z).$$

The weighted Dirichlet space $\mathcal{D}_\alpha$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$ consists of those analytic functions on $\mathbb{D}$ such that

$$\mathcal{D}_\alpha(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dA_\alpha(z) \asymp \sum_{n\geq 0} |\widehat{f}(n)|^2 (1+n)^{1-\alpha} < \infty.$$

1. Papier paru dans *Journal Mathematische Zeitschrift 22 August 2014*

Note that the classical Dirichlet space $\mathcal{D}$ corresponds to $\alpha = 0$ and $\mathcal{D}_1 = \mathrm{H}^2$ is the Hilbertian Hardy space. Every function $f \in \mathcal{D}_\alpha$ has non–tangential limits almost everywhere on the unit circle $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$. If the non–tangential limit of f at $\zeta \in \mathbb{T}$ exists it also will be denoted by $f(\zeta)$.

Let φ be a holomorphic self-map of $\mathbb{D}$. The composition operator C_φ on $\mathcal{D}_\alpha$ is defined by

$$C_\varphi(f) = f \circ \varphi, \qquad f \in \mathcal{D}_\alpha.$$

For $s \in (0,1)$, the level set of φ is given by

$$E_\varphi(s) = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\varphi(\zeta)| \geq s\},$$

The contact set of φ is $E_\varphi := E_\varphi(1)$.

Let $\mathcal{H}$ be a Hillbert space, a compact operator is said to belong in the Schatten class $\mathcal{S}_p(\mathcal{H})$ if its sequence of singular numbers is in the sequence space ℓ^p.

In section 2, we give a simple proof of Luecking's Theorem [29, 39] about the characterization for p–Schatten class of Toeplitz operators for $p \geq 1$. In section 3, we give a simple sufficient condition, in terms of the level set, which ensures the membership to $\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$. This approach allows us to give explicit examples of composition operator belonging to Schatten classes. If the symbol is outer and the contact set is reduced to one point, we give an explicit complete characterization to the membership to $\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$. In the last section, we study the size of contact set of φ, when $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$. For a treatment of some questions addressed in this paper see also [11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 28].

The notation $A \lesssim B$ means that there is a constant C independent of the relevant variables such that $A \leq CB$. We write $A \asymp B$ if both $A \lesssim B$ and $B \lesssim A$.

3.2 Luecking characterization for Schatten class of Toeplitz operators

3.2.1 Toeplitz operators on the Bergman spaces

Let $\alpha > -1$. We denote by $\mathcal{A}_\alpha$ the Bergman space consisting of analytic functions f on $\mathbb{D}$ such that

$$\|f\|_{\mathcal{A}_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 dA_\alpha(z) < \infty.$$

The reproducing kernel of $\mathcal{A}_\alpha$ is given by

$$K_w(z) = \frac{1}{(1-\bar{w}z)^{2+\alpha}}, \qquad z, w \in \mathbb{D}.$$

So we have

$$f(w) = \langle f, K_w \rangle_{\mathcal{A}_\alpha}, \qquad f \in \mathcal{A}_\alpha. \tag{3.1}$$

In particular,

$$\|K_w\|^2_{\mathcal{A}_\alpha} = K_w(w) = \frac{1}{(1-|w|^2)^{2+\alpha}}.$$

For a positive measure μ on the unit disc we associate the operator $\mathbf{T}_\mu$ defined on the Bergman space $\mathcal{A}_\alpha$ by

$$\mathbf{T}_\mu(f)(z) := \int_{\mathbb{D}} K_w(z) f(w) d\mu(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\bar{w}z)^{2+\alpha}} d\mu(w), \qquad f \in \mathcal{A}_\alpha.$$

Let us denote $k_w = K_w/\|K_w\|$ the normalized reproducing kernel at w. The Berezin transform of $\mathbf{T}_\mu$ is given by

$$\widetilde{\mu}(z) := \langle \mathbf{T}_\mu k_z, k_z \rangle_{\mathcal{A}_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{4+2\alpha}} d\mu(w).$$

The hyperbolic measure in $\mathbb{D}$ is given by

$$d\lambda(w) = (1-|w|^2)^{-2} dA(w).$$

It satisfies

$$\int_{\mathbb{D}} |\langle k_w, f \rangle_{\mathcal{A}_\alpha}| d\lambda(w) = \frac{1}{1+\alpha} \|f\|^2_\alpha, \qquad f \in \mathcal{A}_\alpha. \tag{3.2}$$

The dyadic decomposition of $\mathbb{D}$ is the family $(R_{n,j})$ given by

$$R_{n,j} = \Big\{ re^{i\theta} \in \mathbb{D} :\ r_n \leq r < r_{n+1}, \frac{2\pi j}{2^n} \leq \theta < \frac{2\pi(j+1)}{2^n} \Big\}$$

where $j = 0, 1, .., 2^n - 1$ and where $1 - r_n = 2^{-n}$.

Using the dyadic decomposition, it is not difficult to prove that $\widetilde{\mu} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$ if and only if

$$\sum_{n \geq 0} 2^{(2+\alpha)np} \sum_{j=0}^{2^n-1} \mu(R_{n,j})^p < \infty.$$

For details see [37].

The following result is due to Luecking [29] (an alternative proof is given by Zhu [39]). Here we give a simple proof of this result.

Theorem 3.2.1. *Let $p \geq 1$. The following assertions are equivalent.*

(i) $\mathbf{T}_\mu \in \mathcal{S}_p(\mathcal{A}_\alpha)$,

(ii) $\widetilde{\mu} \in L^p(\mathbb{D}, d\lambda)$.

For the proof, we need the following key inequality (see [11, Lemma 2.1]).

Lemma 3.2.2. *Let $f \in \mathcal{A}_\alpha$. Then there exists a constant C, depending only on α, such that*

$$|f(z)|^2 \leq C_\alpha \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{4+2\alpha}} |f(w)|^2 \, dA_\alpha(w), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.3}$$

Proof Let f_n be an orthonormal basis of $\mathcal{A}_\alpha$. We have by (3.1) and (3.3),

$$\begin{aligned}
\sum_n \langle \mathbf{T}_\mu f_n, f_n\rangle^p_{\mathcal{A}_\alpha} =& \sum_{n\geq 1} \Big(\int_{\mathbb{D}} |f_n(z)|^2 d\mu(z)\Big)^p \\
\leq& C_\alpha^p \sum_{n\geq 1} \Big(\int_{\mathbb{D}} \Big[\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{4+2\alpha}} |f_n(w)|^2 dA_\alpha(w)\Big] d\mu(z)\Big)^p \\
=& C_\alpha^p \sum_{n\geq 1} \Big(\int_{\mathbb{D}} \widetilde{\mu}(w) |f_n(w)|^2 dA_\alpha(w)\Big)^p \\
=& C_\alpha^p \sum_{n\geq 1} \Big(\int_{\mathbb{D}} \widetilde{\mu}(w) d\nu_n(w)\Big)^p,
\end{aligned}$$

where $d\nu_n(w) = |f_n(w)|^2 dA_\alpha(w)$. Note that $\nu_n(\mathbb{D}) = \|f_n\|^2_{\mathcal{A}_\alpha} = 1$. By (3.2) and Jensen's inequality, we have

$$\begin{aligned}
\sum_n \langle \mathbf{T}_\mu f_n, f_n\rangle^p_{\mathcal{A}_\alpha} &\leq C_\alpha^p \sum_{n\geq 1} \int_{\mathbb{D}} (\widetilde{\mu}(w))^p |f_n(w)|^2 dA_\alpha(w) \\
&= C_\alpha^p \int_{\mathbb{D}} (\widetilde{\mu}(w))^p \sum_{n\geq 1} |f_n(w)|^2 dA_\alpha(w) \\
&= C_\alpha^p \, \|\widetilde{\mu}\|^p_{L^p(\mathbb{D}, d\lambda)}.
\end{aligned}$$

The last equality comes from the fact that

$$\sum_{n\geq 1} |f_n(w)|^2 = \sum_{n\geq 1} \langle K_w, f_n\rangle_{\mathcal{A}_\alpha} = \|K_w\|_{\mathcal{A}_\alpha} = \frac{1}{(1-|w|^2)^{2+\alpha}}.$$

Conversely, since $\mathbf{T}_\mu \in \mathcal{S}_p(\mathcal{A}_\alpha)$, let $(s_n)_{n\geq 0}$ be the singular values of $\mathbf{T}_\mu$ and $(e_n)_{n\geq 0}$ be the orthonormal sequence of the eigenfunctions of $\mathbf{T}_\mu$ associated to $(s_n)_{n\geq 0}$. Using the spectral decomposition of $\mathbf{T}_\mu$ ($\mathbf{T}_\mu = \sum_{n\geq 1} s_n \langle \cdot, e_n\rangle e_n$) and Jensen's inequality we obtain

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\mu}\|^p_{L^p(\mathbb{D},d\lambda)} &= \int_{\mathbb{D}} |\langle \mathbf{T}_\mu k_w, k_w\rangle_{\mathcal{A}_\alpha}|^p d\lambda(w) \\
&= \int_{\mathbb{D}} \Big(\sum_{n\geq 0} s_n |\langle k_w, e_n\rangle_{\mathcal{A}_\alpha}|^2\Big)^p d\lambda(w) \\
&\leq \int_{\mathbb{D}} \sum_{n\geq 0} s_n^p |\langle k_w, e_n\rangle_{\mathcal{A}_\alpha}|^2 d\lambda(w) \\
&= \frac{1}{1+\alpha}\sum_{n\geq 0} s_n^p.
\end{aligned}$$

This completes the proof. □

3.2.2 Composition operators

Let $\alpha \geq 0$ and $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ such that $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. The generalized counting Nevanlinna function of φ is defined by

$$N_{\varphi,\alpha}(z) = \sum_{w\in\mathbb{D}\,:\,\varphi(w)=z} (1-|w|)^\alpha, \qquad (z\in\mathbb{D}).$$

Note that $N_{\varphi,0}(z) = n_\varphi(z)$ is the multiplicity of φ at z and $N_{\varphi,1}. = N_\varphi$ is equivalent to the usual Nevanlinna counting function associated to φ. For a Borel subset Ω of $\mathbb{D}$, we put

$$\mu_{\varphi,\alpha}(\Omega) = \int_\Omega N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z).$$

It is well known that $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$ if and only if $C_\varphi^* C_\varphi \in \mathcal{S}_{p/2}(\mathcal{D}_\alpha)$. By a routine calculation (see [37]), there exists a rank one operator R on $\mathcal{A}_\alpha$ such that $C_\varphi^* C_\varphi$ and $\mathbf{T}_{\mu_{\varphi,\alpha}} + R$ are similar. It implies that $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$ if and only if $\mathbf{T}_{\mu_{\varphi,\alpha}} \in \mathcal{S}_{p/2}(\mathcal{A}_\alpha)$, and the following result can be deduced easily from Theorem 3.2.1 (see also [37]).

Corollary 3.2.3. *Let $p \geq 2$, $0 \leq \alpha \leq 1$ and φ holomorphic self-map on $\mathbb{D}$. The following assertions are equivalent*

(i) $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$,

(ii) $\displaystyle\sum_n 2^{(2+\alpha)np/2} \sum_{j=0}^{2^n-1} \Big[\mu_{\varphi,\alpha}(R_{n,j})\Big]^{p/2} < \infty$,

(iii) $\widetilde{\mu}_{\varphi,\alpha} \in L^{p/2}(\mathbb{D}d\lambda)$.

Remark 3.2.4. *1. Let g be a positive measurable function on $\mathbb{D}$ and a holomorphic self-map φ on $\mathbb{D}$. By the change of variables formula [36] we have*

$$\int_{\mathbb{D}} (g\circ\varphi)(z)|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z) = (1+\alpha)\int_{\mathbb{D}} g(z)N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z).$$

Hence the condition (iii) becomes

$$\mathcal{I}_{\alpha,p}(\varphi) = (1+\alpha)^{p/2}\int_{\mathbb{D}}\Big(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|^2)^{2+\alpha}}{|1-\overline{w}z|^{4+2\alpha}} N_{\varphi,\alpha}(z)dA(z)\Big)^{p/2} d\lambda(w) < \infty. \tag{3.4}$$

2. The pull back measure associated to φ is defined by

$$m_\varphi(B) := |\{\zeta\in\mathbb{T} : \varphi(\zeta)\in B \ a.e\}|,$$

here B is a Borel subset for $\overline{\mathbb{D}}$ and $|E|$ denotes the normalized Lebesgue measure of a Borelian subset E of $\mathbb{T}$.

In [23], Lefèvre, Li, Queffélec and Rodriguez-Piazza showed that the classical Nevanlinna counting function and the pull buck measure are connected as follows : There exists two universal constants C_1, C_2 such that

$$m_\varphi(W(\zeta, C_1h) \lesssim \sup_{z\in W(\zeta,h)\cap\mathbb{D}} N_\varphi(z) \lesssim m_\varphi(W(\zeta, C_2h)), \qquad \zeta\in\mathbb{T},\ h\in(0,1)$$

where $W(\zeta,h) = \{z\in\mathbb{D} : 1-h\le|z|<1 \text{ and } |\arg(z\bar{\zeta})|\le h\}$ are the Carleson boxes.

Clearly, one can formulate the membership to Schatten classes, in the case of the Hardy space, in terms of the pull back measure as follows,

$$C_\varphi\in\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2) \iff \sum_n 2^{np/2}\sum_{j=0}^{2^n-1}\Big[m_\varphi(R_{n,j})\Big]^{p/2} < \infty.$$

Let $W_{n,j}$ the dyadic Carleson box given by

$$W_{n,j} = \Big\{z = re^{i\theta}\in\mathbb{D} : 1-2^{-n}\le|z|<1 \text{ and } \frac{2\pi j}{2^n}\le\theta<\frac{2\pi(j+1)}{2^n}\Big\},$$

where $j = 0,1,..,2^n-1$. It was remarked in [24] that

$$\sum_n 2^{np/2}\sum_{j=0}^{2^n-1}\Big[m_\varphi(R_{n,j})\Big]^{p/2} < \infty \iff \sum_n 2^{np/2}\sum_{j=0}^{2^n-1}\Big[m_\varphi(W_{n,j})\Big]^{p/2} < \infty.$$

In this paper we will also use the earlier characterization of compactness du to B. MacCluer and J. Shapiro. They showed in [30] that C_φ is compact on H^2 if and only if

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{T}} m_\varphi(W(\zeta,h)) = o(h)(h\to 0).$$

3.3 Membership to $\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$

3.3.1 Membership to $\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$ through level sets

Note that C_φ is in the Hilbert-Schmidt class in H^2 (i.e. $C_\varphi \in \mathcal{S}_2(\mathrm{H}^2)$) if and only if

$$\sum_{n\geq 0} \|\varphi^n\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{|d\zeta|}{1-|\varphi(\zeta)|^2} \asymp \int_0^1 \frac{|E_\varphi(s)|}{(1-s)^2}\, ds < \infty.$$

Then the membership of composition operators to $\mathcal{S}_2(\mathrm{H}^2)$ is completely described by the level sets of their symbols. For $p > 2$, it is proved in [22] that there exists two symbols φ, ψ such that $|E_\varphi(r)| = |E_\psi(r)|$ for $r \in (0,1]$, $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$ and $C_\psi \notin \mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$. In the following proposition we give a sufficient condition in terms of the level sets which ensures the membership to Schatten classes. This allows us to give new examples of operators in $\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2) \setminus \mathcal{S}_2(\mathrm{H}^2)$ for $p > 2$.

Proposition 3.3.1. *Let $p \geq 2$. If*

$$\int_0^1 \frac{|E_\varphi(s)|^{p/2}}{(1-s)^{1+p/2}} ds < \infty,$$

then $C_\varphi \in S_p(\mathrm{H}^2)$.

Proof Since $|E_\varphi(1-2^{-n})| = \sum_{j=0}^{2^n-1} m_\varphi(W_{n,j})$, we get

$$\sum_{j=0}^{2^n-1} m_\varphi(W_{n,j})^{p/2} \leq |E_\varphi(1-2^{-n})|^{p/2}.$$

Hence,

$$\begin{aligned} \sum_n 2^{np/2} \sum_{j=0}^{2^n-1} m_\varphi(W_{n,j})^{p/2} &\leq \sum_n |E_\varphi(1-2^{-n})|^{p/2} \int_{1-2^{-n}}^{1-2^{-n-1}} \frac{ds}{(1-s)^{1+p/2}} \\ &\leq \int_0^1 \frac{|E_\varphi(s)|^{p/2}}{(1-s)^{1+p/2}} ds < \infty. \end{aligned}$$

By Remarks 3.2.4.2, we obtain $C_\varphi \in S_p(\mathrm{H}^2)$. □

Remark 3.3.2. *If $C_\varphi \in S_p(\mathrm{H}^2)$, then*

$$\int_0^1 \frac{|E_\varphi(r)|^{p/2}}{(1-r)^2} < \infty.$$

Indeed, write $|E_\varphi(1-2^{-n})| = 2^n(\sum_{j=0}^{2^n-1} 2^{-n} m_\varphi(W_{n,j}))$. So by Jensen's inequality,

$$|E_\varphi(1-2^{-n})|^{p/2} \leq 2^{np/2-n} \sum_{j=0}^{2^n-1} m_\varphi(W_{n,j})^{p/2}.$$

Since $C_\varphi \in S_p(\mathrm{H}^2)$, by Remark 3.2.4.2, we have

$$\int_0^1 \frac{|E_\varphi(r)|^{p/2}}{(1-r)^2} \leq \sum_n 2^n |E_\varphi(1-2^{-n})|^{p/2} \leq \sum_n 2^{np/2} \sum_{j=1}^{2^n} m_\varphi(W_{n,j})^{p/2} < \infty.$$

Now we are able to give some concrete examples. Let K be a closed subset of the unit circle $\mathbb{T}$. Fix a non-negative function $h \in C^1[0,\pi]$ such that $h(0)=0$. We consider the outer function defined by

$$f_{h,K}(z) = \exp\Big(- \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\, h(d(\zeta,K))\ |d\zeta| \Big),$$

where d denotes the arc-length distance. It is known that the non tangential limit of $f_{h,K}$ satisfies

$$|f_{h,K}(\zeta)| = e^{-h(d(\zeta,K))}, \qquad \text{a.e. on } \mathbb{T}. \tag{3.5}$$

Given $K \subset \mathbb{T}$ and $t > 0$, let us write $K_t = \{\zeta : d(\zeta,K) \leq t\}$ and $|K_t|$ denotes the Lebesgue measure of K_t.

Corollary 3.3.3. *Let $p \geq 2$ and let $\varphi = f_{h,K}$.*

1. *If*
$$\int_0 \frac{h'(t)}{h(t)^{1+p/2}} |K_t|^{p/2} dt < \infty,$$
then $C_\varphi \in S_p(\mathrm{H}^2)$.
2. *If $C_\varphi \in S_p(\mathrm{H}^2)$ then*
$$\int_0 \frac{h'(t)}{h(t)^2} |K_t|^{p/2} dt < \infty.$$

Proof Since

$$\begin{aligned} |E_\varphi(s)| &= |\{\zeta \in \mathbb{T} : e^{-h(d(\zeta,K))} \geq s\}| \\ &\asymp |\{\zeta \in \mathbb{T} : d(\zeta,K) \leq h^{-1}(1-s)\}| \\ &= |K_{h^{-1}(1-s)}| \end{aligned}$$

Proposition 3.3.1 and Remark 3.3.2 give the result. □

Note that there are several examples of composition operators which belong in $\mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2) \setminus \mathcal{S}_2(\mathrm{H}^2)$ for $p > 2$ (see [8, 12, 17, 22]). In all these examples the contact sets of their symbols is reduced to one point. Here we will construct examples with a large set of contact points. To state our example we have to recall the definition of Hausdorff dimension.

Let E be a closed subset of $\mathbb{T}$. The Hausdorff dimension of E is defined by

$$d(E) = \inf\{\alpha : \Lambda_\alpha(E) = 0\}$$

where $\Lambda_\alpha(E)$ is the α–Hausdorff measure of E given by

$$\Lambda_\alpha(E) = \lim_{\epsilon\to 0}\inf\Big\{\sum_i |\Delta_i|^\alpha : E \subset \bigcup_i \Delta_i \ , \ |\Delta_i| < \epsilon\Big\}.$$

Corollary 3.3.4. *Let $p > 2$ there exists an analytic self–map φ of $\mathbb{D}$ such that $\varphi \in A(\mathbb{D})$, the disc algebra, $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)\backslash\mathcal{S}_2(\mathrm{H}^2)$ and $d(E_\varphi) = 1$.*

Proof It suffices to apply corollary 3.3.3 with $\varphi = f_{h,K}$ where

$$h(t) = \frac{1}{\log^2(e/t)} \quad \text{and} \quad |K_t| \asymp \frac{1}{\log^2(e/t)\log\log(e^2/t)}.$$

□

Other type of examples are constructed by Gallardo-Gonzalez [13]. They proved that there exists a univalent symbol φ such that C_φ is compact on H^2 and such that the Hausdorff dimension of E_φ is equal to one. This result can not be extended to Schatten classes. Indeed, we have the following result

Proposition 3.3.5. *Let $p \geq 2$. If φ is univalent function such that $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$ then*

$$d(E_\varphi) \leq \frac{p}{p+2}.$$

For the proof see Remark 3.4.5.

3.3.2 Contact set reduced to one point

In this subsection we will consider outer functions φ which their contact set is reduced to one point. In this case, and under some regularity conditions, we give a concrete necessary and sufficient condition for the membership to Schatten classes.

Let h be a continuous increasing function defined on $[0, \pi]$ such that $h(0) = 0$. We extend it to an even 2π-periodic function on $\mathbb{R}$. We say that the function h is admissible if h is differentiable, $h(2t) \asymp h(t) \asymp th'(t)$, and h is concave or convex.

Let φ be the outer function on $\mathbb{D}$ such that

$$|\varphi(e^{it})| = e^{-h(t)}, \qquad \text{a.e on } (0, \pi).$$

We have the following :

Theorem 3.3.6. *Let h be an admissible function such that $t^2 = o(h(t))$ and*

$$h(\theta) = o\big(\theta \int_\theta^\pi \frac{h(t)}{t^2}\big)(t \to 0).$$

Then

1. *C_φ is compact if and only if*
$$\int_0^\pi \frac{h(t)}{t^2} dt = \infty.$$
2. *Let $p > 0$, then $C_\varphi \in S_p(\mathrm{H}^2)$ if and only if*
$$\int_0^\pi \frac{dt}{h(t)\left(\int_t^\pi \frac{h(s)}{s^2} ds\right)^{p/2-1}} < +\infty.$$

As an immediate consequence of this theorem we obtain

Corollary 3.3.7. *1. There exists compact composition operator C_φ on H^2 but belongs to none Schatten class.*

2. Let $q > 0$ there exists a compact composition operator C_φ such that

$$C_\varphi \in \bigcap_{p>q} \mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2) \backslash \mathcal{S}_q(\mathrm{H}^2).$$

To prove our theorem, we need some notions. Let $\widetilde{h}$ be the harmonic conjugate of h. It is defined by

$$\widetilde{h}(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi} \int_\varepsilon^\pi \frac{h(\theta + t) - h(\theta - t)}{\tan(t/2)} dt.$$

The Hilbert transform of h will be denoted by Hh and is given by

$$Hh(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_\varepsilon^\pi \frac{h(\theta + t) - h(\theta - t)}{t} dt$$

see [15]. We will also need the following auxiliary function

$$\Psi(\theta) := \frac{1}{\pi} \int_{2\theta}^{\pi - 2\theta} h'(s) \log \frac{s + \theta}{s - \theta} ds.$$

The following estimates of $\widetilde{h}$ is the key of the proof of our theorem.

Lemma 3.3.8. *Let h be an admissible function. There exists $a, b > 0$ such that*

$$\Psi(\theta) \le \widetilde{h}(\theta) \le \Psi(\theta) + a h(\theta) + b\theta^2, \qquad \theta \in [0, \pi/4].$$

Proof First let's estimate the Hilbert transform of h. Under our assumptions, the Hilbert transform can be written as follows

$$Hh(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{h(\theta+t)-h(\theta-t)}{t}dt.$$

We split the integral into three parts

$$\begin{aligned} Hh(\theta) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \frac{h(\theta+t)-h(\theta-t)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_\theta^{\pi-\theta} \frac{h(\theta+t)-h(t-\theta)}{t}dt \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{\pi-\theta}^{\pi} \frac{h(2\pi-\theta-t)-h(t-\theta)}{t}dt \\ &= A+B+C. \end{aligned}$$

Since h increases on $(0,\pi)$, it is clear that A, B, C are positive. First, we will prove that

$$A + C = O(h(2\theta)+\theta^2). \tag{3.6}$$

By concavity or convexity, we have

$$h(t+\theta)-h(\theta-t) \leq 2t\max(h'(\theta-t), h'(\theta+t)).$$

Hence,

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \frac{h(\theta+t)-h(\theta-t)}{t}dt \leq \frac{2}{\pi}h(2\theta)$$

By a change of variables and convexity, we get

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \frac{h(\pi-\theta+u)-h(\pi-\theta-u)}{\pi-u}du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\theta \frac{2u\max(h'(\pi-\theta-u), h'(\pi-\theta+u))}{\pi-u}du \\ &\leq \frac{8\theta^2}{3\pi^2}\sup_{\theta\in[\pi/2,\pi]}|h'(t)|. \end{aligned}$$

Hence (3.6) is proved. Now we have to estimate B. We have

$$\begin{aligned} \pi B &= \int_0^\pi \frac{\chi_{[\theta,\pi-\theta]}}{t}\Big(\int_{t-\theta}^{t+\theta} h'(s)ds\Big)dt \\ &= \int_0^\pi h'(s)\int_{s-\theta}^{s+\theta}\frac{\chi_{[\theta,\pi-\theta]}}{t}dt \\ &= \int_\theta^{2\theta} h'(s)\log\frac{s+\theta}{\theta}ds + \int_{2\theta}^{\pi-2\theta} h'(s)\log\frac{s+\theta}{s-\theta}ds + \int_{\pi-2\theta}^{\pi} h'(s)\log\frac{\pi-\theta}{s-\theta}ds \\ &= B_1+B_2+B_3 \end{aligned}$$

Note that

$$B_1 + B_3 = O(h(2\theta) + \theta^2).$$

Indeed, we have

$$B_1 \le \log 3(h(2\theta) - h(\theta))$$

and

$$B_3 \le 2\theta \log \frac{\pi - \theta}{\pi - 3\theta} \sup_{[\pi/2,\pi]} |h'(s)| \le \frac{4^2\theta^2}{\pi} \sup_{[\pi/2,\pi]} |h'(s)|.$$

Hence the estimate of the Hilbert transform follows from B_2 and we have

$$\Psi(\theta) \le Hh(\theta) \le \Psi(\theta) + c_1 h(2\theta) + c_2\theta^2, \qquad \theta \in [0, \pi/4].$$

Since

$$\frac{1}{\tan(t/2)} - \frac{1}{t} = -\frac{t}{3} + o(t^2),$$

as before

$$|Hh(\theta) - \widetilde{h}(\theta)| = O(h(2\theta) + \theta^2) \qquad \theta \to 0.$$

The proof is complete. □

Remark 3.3.9. *1. If* $\displaystyle\int_0^\pi \frac{h(t)}{t^2} dt = \infty$*, then*

$$\theta^2 + h(\theta) = O\Big(\theta \int_\theta^\pi \frac{h(t)}{t^2} dt\Big), \quad \theta \to 0+.$$

2. Note that if h *is an admissible function and* $\displaystyle\int_0^\pi \frac{h(t)}{t^2} dt = \infty$ *then*

$$\Psi(\theta) = \int_{2\theta}^{\pi - 2\theta} h'(s) \log \frac{s+\theta}{s-\theta} ds \asymp \theta \int_\theta^\pi \frac{h(t)}{t^2} dt.$$

Observe that, the function Ψ *is increasing,* $\Psi(0) = 0$*, and satisfies the following properties*

— $\Psi(t) \asymp \Psi(2t)$

— $\Psi'(\theta) \asymp \displaystyle\int_\theta^\pi \frac{h(t)}{t^2} dt$

— $(\Psi^{-1})'(2t) \asymp (\Psi^{-1})'(t)$.

Proof of Theorem

1) Let m_φ be the pull back measure associated to the function φ and let $W(1, \delta) = \{z \in \mathbb{D} : 1 - |z| < \delta,\ |\arg(z)| < \delta\}$ be a Carleson box.

Note that

$$\begin{aligned} m_\varphi(W(1,\delta)) &= |\{\theta\in(-\pi,\pi):\ |\varphi^*(e^{i\theta})|\in W(1,\delta)\} \\ &\asymp |\{\theta\in(0,\pi):\ h(\theta)<\delta,\ \ \widetilde{h}(\theta)<\delta\}| \\ &\asymp |\{\theta\in(0,\pi):\Psi(\theta)<\delta\}| \\ &\asymp \Psi^{-1}(\delta). \end{aligned}$$

Recall that C_φ is compact if and only if $m_\varphi(W(1,\delta))=o(\delta)$. It follows that C_φ is compact if $\Psi^{-1}(\delta)=o(\delta)$ as $\delta\to 0$, which is equivalent to

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^2}dt=+\infty.$$

Conversely, suppose that $\displaystyle\int_0^\pi \frac{h(t)}{t^2}dt<+\infty$. It is clear that $h(t)=o(t)$. Note that $\theta=O(\widetilde{h}(\theta))$. Indeed by convexity

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(\theta) &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{2\theta}^{\pi-\theta}\frac{h(\theta+t)-h(t-\theta)}{\tan(t/2)}dt \\ &\geq 2\theta\int_{2\theta}^{\pi-\theta}\frac{\max(h'(t-\theta),h'(t+\theta))}{\tan(t/2)}dt\asymp\theta\int_\theta^\pi\frac{h(t)}{t^2}dt\asymp\theta \end{aligned}$$

So in this case $m_\varphi(W(1,\delta))\asymp\delta$ and C_φ is not compact.

2) To prove the second assertion, we will estimate $m_\varphi(W_{n,j})$, where

$$W_{n,j}=W(e^{i2\pi j/2^n},1/2^n)=\{z\in\mathbb{D}:1-|z|<1/2^n,\ j/2^n\leq\arg z<(j+1)/2^n\}.$$

Let

$$\Omega_{n,j}=\{\theta:\ h(\theta)<1/2^n,\ j/2^n\leq\widetilde{h}(\theta)<(j+1)/2^n\}.$$

We have $m_\varphi(W_{n,j})=|\Omega_{n,j}|$. By Lemma 3.3.6, there exists $\kappa>0$ such that

$$\Psi(\theta)\leq\widetilde{h}(\theta)\leq\Psi(\theta)+\kappa h(\theta).$$

Let

$$A_{n,j}:=\{\theta:\ h(\theta)<1/2^n,\ j/2^n\leq\Psi(\theta)<(j+1)/2^n\}.$$

Hence for $j\geq[\kappa]+1$,

$$\Omega_{n,j}\subset\{\theta:\ h(\theta)<1/2^n,\ (j-\kappa)/2^n\leq\Psi(\theta)<(j+1)/2^n\}=\bigcup_{l=j-[\kappa]}^{j}A_{n,l}$$

and for $j \leq [\kappa]$,

$$\Omega_{n,j} \subset \{\theta : \ h(\theta) < 1/2^n, \ \Psi(\theta) < (j+1)/2^n\} = \bigcup_{l=0}^{j} A_{n,l}.$$

Note that for $\theta \in A_{n,j}$, we have $A_{n,j} =$ for $j > J_n = 2^n \Psi(h^{-1}(1/2^n))$. We obtain

$$\sum_n 2^{np/2} \sum_{j=0}^{2^n-1} \Big[m_\varphi(W_{n,j}) \Big]^{p/2} \lesssim \sum_n 2^{np/2} \sum_{j=0}^{J_n} |A_{n,j}|^{p/2}.$$

Recall that $(\Psi^{-1})'(2t) \asymp (\Psi^{-1})'(t)$. By Remark 3.3.9.2, we have

$$\begin{aligned}
\sum_n 2^{np/2} \sum_{j=0}^{J_n} |A_{n,j}|^{p/2} &\asymp \sum_n 2^{np/2} \sum_0^{J_n} \Big(\int_{j/2^n}^{(j+1)/2^n} (\Psi^{-1})'(t) dt \Big)^{p/2} \\
&\asymp \sum_n \sum_0^{J_n} \Big[(\Psi^{-1})'(j/2^n) \Big]^{p/2} \asymp \sum_n \int_0^{J_n} \Big[(\Psi^{-1})'(s) \Big]^{p/2} ds \\
&\asymp \sum_n \sum_0^{J_n} 2^n \int_{j/2^n}^{(j+1)/2^n} \Big[(\Psi^{-1})'(t) \Big]^{p/2} dt \asymp \sum_n 2^n \int_0^{J_n/2^n} \Big[(\Psi^{-1})'(t) \Big]^{p/2} \\
&\asymp \sum_n 2^n \int_0^{\Psi^{-1}(h^{-1}(1/2^n))} \Big[(\Psi^{-1})'(t) \Big]^{p/2} \asymp \sum_n 2^n \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\Psi^{-1}(h^{-1}(1/2^k))}^{\Psi^{-1}(h^{-1}(1/2^{k+1}))} \Big[(\Psi^{-1})'(t) \Big]^{p/2} \\
&\asymp \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \int_{\Psi^{-1}(h^{-1}(1/2^k))}^{\Psi^{-1}(h^{-1}(1/2^{k+1}))} \Big[(\Psi^{-1})'(t) \Big]^{p/2} \asymp \int_0^1 \frac{\Big[(\Psi^{-1})'(t) \Big]^{p/2}}{h \circ \Psi^{-1}(t)} dt \\
&\asymp \int_0^1 \frac{1}{h(u)} \frac{1}{\Big[\Psi'(u) \Big]^{\frac{p}{2}-1}} du \asymp \int_0^1 \frac{1}{h(u) \Big(\int_u^1 \frac{h(s)}{s^2} ds \Big)^{\frac{p}{2}-1}} du.
\end{aligned}$$

Conversely, let $0 < c_1 < 1$

$$B_{n,j} := \{\theta : \ h(\theta) < (1-c_1)/(\kappa 2^n) : j/2^n \leq \Psi(\theta) < (j+c_1)/2^n\},$$

By Lemma 3.3.8 $B_{n,j} \subset \Omega_{n,j}$. The rest of the proof runs in the same way as before. $\square$

Remark 3.3.10. *Note that H. Queffelec and K. Seip studied in [28] the asymptotic behavior of the singular values of composition operators with symbol having one point as contact set.*

3.4 Schatten class $\mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$ and level sets

Let φ be a holomorphic self map of $\mathbb{D}$. In this section, we discuss the size of E_φ, when $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$.

Given a (Borel) probability measure μ on $\mathbb{T}$, we define its α-energy, $0 \leq \alpha < 1$, by

$$I_\alpha(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\widehat{\mu}(n)|^2}{n^{1-\alpha}}.$$

For a closed set $E \subset \mathbb{T}$, its α-capacity $\operatorname{cap}_\alpha(E)$ is defined by

$$\operatorname{cap}_\alpha(E) := 1/\inf\{I_\alpha(\mu) : \mu \text{ is a probability measure on } E\}.$$

For Borelian set E of the unit circle its α-capacity is defined as follows

$$\operatorname{cap}_\alpha(E) := \sup\{\operatorname{cap}_\alpha(F) : \ F \subset E, \ F \text{ closed}\}.$$

Note that if $\alpha = 0$, $\operatorname{cap} := \operatorname{cap}_0$ is equivalent to the classical logarithmic capacity. There is a connection between the α–capacity and the Hausdorff dimension. In fact the capacitary dimension of E is the supremum of $\alpha > 0$ such that $\operatorname{cap}_\alpha(E) > 0$. By Frostman's Lemma [20] the capacitary dimension is equal to the Hausdorff dimension for compact sets. Let us mention the result obtained by Beurling in [3] (and extended by Salem Zygmund [4, 20]), which reveals an important connection between α-capacities and weighted Dirichlet spaces. These results can be stated as follows : Let $f \in \mathcal{D}_\alpha$, the radial limit of f satisfies capacitary weak-type inequality

$$\operatorname{cap}_\alpha\{\zeta \in \mathbb{T} : |f(\zeta)| \geq t\} \leq A\frac{\|f\|_\alpha^2}{t^2}.$$

In particular

$$\operatorname{cap}_\alpha(\{\zeta \in \mathbb{T} : f(\zeta) \text{ does not exist}\}) = 0.$$

Our main result in this section is the following theorem.

Theorem 3.4.1. *Let φ be a holomorphic self–map of $\mathbb{D}$, $\alpha \in (0,1)$ and $p \leq 2/(1-\alpha)$. If $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$ then* $\operatorname{cap}_\alpha(E_\varphi) = 0$.

For the proof we need the following lemmas.

Lemma 3.4.2. *If*

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2 dA_\alpha(z)}{(1-|\varphi(z)|^2)^2 \log 1/(1-|\varphi(z)|^2)} < \infty, \tag{3.7}$$

then $\operatorname{cap}_\alpha(E_\varphi) = 0$

*Proof*First, note that

$$\frac{1}{(1-x^2)^2 \log e/(1-x^2)} \asymp \sum_{n\geq 0} \frac{1+n}{\log e(1+n)} x^{2n}, \qquad x \in (0,1). \tag{3.8}$$

Indeed,

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1+n}{\log e(1+n)}x^{2n}\geq \sum_{\frac{1}{1-x^2}\leq n\leq \frac{2}{1-x^2}}\frac{1+n}{\log e(1+n)}x^{2n}\asymp \frac{1}{(1-x^2)^2\log e/(1-x^2)},$$

and

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1+n}{\log e(1+n)}x^{2n}\leq \sup_n \frac{1+n}{\log e(1+n)}x^n\sum_m x^m\asymp \frac{1}{(1-x)\log e/(1-x)}\frac{1}{1-x}.$$

By (3.8), we have

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}}\frac{|\varphi'(z)|^2dA_\alpha(z)}{(1-|\varphi(z)|^2)^2\log 1/(1-|\varphi(z)|^2)} &\asymp \sum_{n\geq 0}\frac{1+n}{\log(1+n)}\int_{\mathbb{D}}|\varphi'(z)|^2|\varphi(z)|^{2n}dA_\alpha(z)\\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{\mathcal{D}_\alpha(\varphi^n)}{(1+n)\log(1+n)}.\end{aligned}$$

So (3.7) implies that $\liminf_n \|\varphi^n\|_\alpha=0$. On the other hand, the weak capacity inequality gives

$$\operatorname{cap}_\alpha(E_\varphi)=\operatorname{cap}_\alpha(E_{\varphi^n})\leq c_\alpha\|\varphi^n\|_\alpha^2.$$

Now let $n\to\infty$, we get our result. □

Lemma 3.4.3. *Let $d>0$, $c>-1$ and $\sum\geq 0$, then*

$$\int_{\mathbb{D}}\frac{dA_c(w)}{|1-z\overline{w}|^{2+c+d}|\log(1-|w|^2)|^\sigma}\asymp\frac{1}{(1-|z|^2)^d|\log(1-|z|^2)|^\sigma} \tag{3.9}$$

Proof Let $w=|w|e^{it}$, by [39, Lemma 3.2], we have

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{|1-z|w|e^{-it}|^{2+c+d}}\asymp\frac{1}{(1-|zw|)^{1+c+d}}.$$

Using this result the lemma follows from a direct computation. □

3.4.1 Proof of Theorem

Let $\beta=2/(p-2)$ and

$$d\mu(w)=\frac{dA(w)}{(1-|w|)|\log(1-|w|)|^{1+\beta}}.$$

We have $\mu(\mathbb{D})<\infty$, so for $p\geq 2$, by Jensen inequality and by Lemma 3.4.3, we obtain

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{\mathbb{D}}\frac{|\varphi'(z)|^2dA_\alpha(z)}{(|1-|\varphi(z)|^2)^{1+\alpha+2/p}|\log(1-|\varphi(z)|^2)|}\Big)^{\frac{p}{2}}\\ &\quad\asymp\Big(\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{2+\alpha-\frac{2}{p}}|\log(1-|w|)|^{(1+\beta)\frac{2}{p}}|\varphi'(z)|^2}{|1-\overline{w}\varphi(z)|^{4+2\alpha}}dA_\alpha(z)\frac{d\mu(w)}{\mu(\mathbb{D})}\Big)^{\frac{p}{2}}\\ &\quad\lesssim\int_{\mathbb{D}}\Big(\int_{\mathbb{D}}\frac{(1-|w|^2)^{2+\alpha-\frac{2}{p}}|\log(1-|w|)|^{(1+\beta)\frac{2}{p}}|\varphi'(z)|^2}{|1-\overline{w}\varphi(z)|^{4+2\alpha}}dA_\alpha(z)\Big)^{\frac{p}{2}}\frac{d\mu(w)}{\mu(\mathbb{D})}\asymp\mathcal{I}_{\alpha,p}(\varphi).\end{aligned}$$

Since $\alpha + 2/p + 1 \geq 2$, by Remarks 3.2.4.2 and Lemma 3.4.2 we get the result. $\square$

As a consequence, we obtain the following corollary.

Corollary 3.4.4. *Let* $0 < \alpha \leq 1$ *and* φ *be a holomorphic self–map of* $\mathbb{D}$. *Suppose that* φ *is univalent. If* $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$ *then* $\mathrm{cap}_{\frac{p\alpha}{2+p\alpha}}(E_\varphi) = 0$.

Proof Since φ is univalent, $N_{\varphi,\beta} = (N_\varphi)^\beta$. By [32], $C_\varphi \in S_p(\mathcal{D}_\beta)$ if and only if $N_{\varphi,\beta} \in L^{p/2}(\mathbb{D}, d\lambda)$. Using these observations, it is clear that $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$ if and only if $C_\varphi \in \mathcal{S}_{p/\gamma}(\mathcal{D}_{\alpha\gamma})$. Let $\gamma = 2 + p\alpha/p$, since $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathcal{D}_\alpha)$, $C_\varphi \in \mathcal{S}_{2+p\alpha}(\mathcal{D}_{\frac{p\alpha}{2+p\alpha}})$. The result follows from Theorem 3.4.1. $\square$

Remark 3.4.5. *If* φ *is univalent function and* $C_\varphi \in \mathcal{S}_p(\mathrm{H}^2)$ *(here* $\alpha = 1$*) then* $\mathrm{cap}_{\frac{p}{2+p}}(E_\varphi) = 0$.

Proposition 3.4.6. *If* C_φ *is bounded on* $\mathcal{D}_\alpha$ *and* $\varphi(\mathbb{D})$ *is contained in a polygon of the unit disc, then* $\mathrm{cap}_\alpha(E_\varphi) = 0$.

Proof Since C_φ is bounded on $\mathcal{D}_\alpha$,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{T}} \mu_{\varphi,\alpha}(W(\xi, h)) = O(h^{2+\alpha})(h \to 0).$$

see [11, 19]. Hence $\mu_{\varphi,\alpha}(R_{n,j}) = O(1/2^{(2+\alpha)n})$. Suppose that $\varphi(\mathbb{D})$ is contained in a polygon of the unit disc, then for all n we have $\mu_{\varphi,\alpha}(R_{n,j}) = 0$ uniformly on n except for a finite number of j. Then there exists J such that for all n and all $j \geq J$, $\mu_{\varphi,\alpha}(R_{n,j}) = 0$ and so

$$\sum_{n\geq 1} 2^{2n} \sum_j \mu_{\varphi,\alpha}(R_{n,j}) < \infty.$$

Now, we get

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^2} dA_\alpha(z) = \sum_n 2^{2n} \sum_j \Big(\int_{R_{n,j}} N_{\varphi,\alpha}(z) dA(z) \Big) < \infty,$$

and by Lemma 3.4.2 we obtain $\mathrm{cap}_\alpha(E_\varphi) = 0$. $\square$

Gallardo-González [14, Corollary 3.1] showed that for all $\alpha \in (0, 1]$ there exists a compact composition operator, C_φ, on $\mathcal{D}_\alpha$ such that the Hausdorff dimension of E_φ is one. In the case of the classical Dirichlet space ($\alpha = 0$) the situation is different as showed in the following proposition.

Proposition 3.4.7. *If* C_φ *is compact on the Dirichlet space* $\mathcal{D}$, *then* E_φ *has vanishing Hausdorff dimension.*

Proof Let $K_\lambda(z) = \log 1/(1-z\overline{\lambda})$ be the reproducing kernel of $\mathcal{D}$ and let $k_\lambda(z) = K_\lambda(z)/(\log 1/1-|\lambda|^2)^{1/2}$ the normalized reproducing kernel. If C_φ is compact then C_φ^* is as well and $C_\varphi^*(k_\lambda) \to 0, \quad |\lambda| \to 1$. Hence

$$\frac{k_{\varphi(\lambda)}(\varphi(\lambda))}{k_\lambda(\lambda)} = \frac{|\log(1-|\varphi(\lambda)|^2)|}{|\log(1-|\lambda|^2|)} \to 0, \qquad |\lambda| \to 1.$$

Then $(1-|\lambda|^2)^\beta/(1-|\varphi(\lambda)|^2)^2$ is bounded for all $\beta \in (0,1]$. So

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{|\varphi'(z)|^2}{(1-|\varphi(z)|^2)^2} dA_\alpha(z) \leq C \int_{\mathbb{D}} |\varphi'(z)|^2 dA(z) = \mathcal{D}(\varphi) < \infty.$$

By Lemma 3.7, $\text{cap}_\alpha(E_\varphi) = 0$ for all α and hence $d(E) = 0$ (see [20]). $\square$

Bibliographie

Partie I

[1] D. L. Antzoulakos and A.N. Philippou, *Multivariate Fibonacci polynomial of order k and the Multiparameter negative binomial distribution of the same order*, Application of the Fibonacci Numbers 3 : 273-279. Ed. G. E. Bergum et al. Dorrecht : Kluwer, 1990.

[2] A R.P.Agarwal and P.J.Y.Wong, *Advanced Topics in Difference Equations,* Kluwer, Dordrecht ,(1997).

[3] H. Benazzouz, M. Mouline and M. Rachidi, *On the Fibonacci Markov chains*, Journal of Interdisciplinary Mathematics Vol. 11 Number 1 (2008), pp. 89-98.

[4] R. Ben Taher and M. Rachidi, *Linear Recurrence Relation in the Algebra of square Matrices and Applications.* Linear Algebra and Its Applications, Vol. 330 (1-3) (2001), pp. 15-24.

[5] R. Ben Taher and M. Rachidi, *Some explicit formulas for the polynomial decomposition of the matrix exponential and Applications.* Linear Algebra and Its Applications, Vol. 350 (1-3) (2002), pp. 171-184.

[6] R. Ben Taher and M. Rachidi, *On the matrix powers and exponential by the r-generalized Fibonacci sequences methods. The companion matrix case.* Linear Algebra and Applications **370** (2003), pp. 341-353.

[7] R. Ben Taher, M. Rachidi and H. Zerouali, *Recursive subnormal completion and truncated moment problem*, Bull. London Math. Soc. 33 (2001), 425-432.

[8] R. Ben Taher, M. Mouline and Mustapha Rachidi, *Convergence of r-generalized Fibonacci sequences, Hőrner's diagram and an extension of Ostrowski's condition* Fibonacci Quart.Vol 40 (5) (2002), pp. 386-393.

[9] D. Carton, Processus aléatoires utilisés en recherche opérationnelle. Edition Masson (1975).

[10] L. Combet, *Analyse combinatoire.* Tome 1, Presse Universitaire de France.

[11] F. Dubeau, *2-Generalized Fibonacci sequences.* Fibonacci Quarterly 27 (1989), p.221-229.

[12] F. Dubeau, W. Motta, M. Rachidi and O. Saeki, *On weighted r-generalized Fibonacci sequences,* The Fibonacci Quarterly 35 (1997), 102-110.

[13] C. R. Hanusa, *A generalized Binet's formula for k^{th} order linear ecurrences, a Markov chains approach*, (Thesis), Department of Mathematics, Harvey Muydd College.

[14] C. R. Hanusa, A. T. Benjamin and F. E. Su, *Linear recurrences through tillings and Markov chains* ,

[15] P.G. Hoel, S.C. Port and C.J. Stone, *Introduction to stochastic process*, Houghton Mifflin Edition (1972).

[16] D. Kalman, *Generalized Fibonacci Sequences by matrix method*, Fibonacci Quart. 23 (1982) : 73-76.

[17] S. Karline and H.M. Taylor, *A first course in stochastic process*, Academic Press (1975).

[18] S.T. Klein, *Combinatorial representation of generalised Fibonacci numbers* Fibonacci Quarterly, **29-2**(1991) 124-131.

[19] C. Levesque, *On the mth linear recurrences,* Fibonacci Quart. 23 (1985) : 290-295.

[20] W.I. McLaughlin, *Note on a tetranacci alternative to Bode'law*, Fibonacci Quarterly **31-4** (1993), 307-314.

[21] M. Minoux, *Programation mathématique,* Tome 1 , edition Dunod.

[22] M. Mouline, Suite de Fibonacci généralisées et chaînes de Markov, Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences. Faculté des Sciences de Tétouan (décembre 1995).

[23] M. Mouline and M. Rachidi, *Suites de Fibonacci généralisése et chaînes de Markov,* Real Academia de Ciencias Exatas, Fisicas y Naturales de Madrid, Tom. 89, Num 1-2 (1995) : 61-77.

[24] M. Mouline and M. Rachidi, *Application of Markov Chains Properties to r-Generalized Fibonacci Sequences*, Fibonacci Quart. 37-1 (1999) : 34-38.

[25] M. Mouline and M. Rachidi, *Suites de Fibonacci généralisése, Théorème de Caley-Hamilton et chaînes de Markov,* Rendiconti del Seminario Mat. di Messina, Serie II, Vol. 4 (1996-1997), pp. 107-115.

[26] A.M. Ostrowski, *Solutions of Equations in Euclidean and Banach Spaces*, Academic Press, New York and London (1973).

[27] A.N. Philippou, *A note on the Fibonacci Sequence of Order k and the Multinomial Coefficients*, the Fibo. Quart. , 21, (1983) : 82-86.

[28] G.N. Philippou, *On the k-th order linear recurrence and some probability Applications*. Applications of Fibonacci Numbers, Kluwer Academic Publishers (1988).

[29] M. Rachidi, H. Saidi and J. Zerouaoui, *Fractional statistics in terms of r-generalized Fibonacci sequences*. Internat. Jour. of Moderne Phys. Vol. 18 Num. 1 (2003), p. 159-171.

Bibliographie

Partie II

[1] A. Aleman, S. Richter and W. T. Ross, Pseudocontinuations and the backward shift. Indiana. Univ. Math. J. 47 (1998) 223-276.

[2] C. Apostol, L. A. Fialkow, D. A. Herrero and D. Voiculescu, Approximation of Hilbert Space Operators II. Research Notes in Mathematics 102 Pitman 1984.

[3] B. A. Barnes, The commutant of an abstract backward shift. Canad. Math. Bull 43 (2000) 21-24

[4] J.Bračič et V.Müller, Open set of eigenvalues and SVEP.

[5] J.B. Conway, The theory of Subnormal Operators. American Mathematical Society. Mathematical Surveys and Monographs

[6] N. Feldmann Pure Subnormal Operators have Cyclic Adjoints. 36 (1991). J. Functional Analysis 162 (1999), no. 2, 379 - 399

[7] J. Finch, On the local spectrum and the adjoint. Pacific. J Math. 94 (1981) 297-302.

[8] D. A. Herrero, On multicyclic operators. Integral Equations and Operator Theory 1 (1978) 57-102.

[9] J. Holub, On shift operators. Canad. Math. Bull 31 (1988) 85-94.

[10] K.B. Laursen and M.M. Neumann, An Introduction to Local Spectral Theory. Lond. Math. soc. Monographs. 2000

[11] M. Mbekhta and E. H. Zerouali, Points d'évaluation pour les opérateurs cycliques ayant la propriété de Bishop (β), Journal of Func. Analysis 206 (2004) 69-86

[12] T. L. Miller, V. G. Miller, and M.M. Neumann, Analytic bounded point evaluations for cyclic operators on Banach spaces. Integral Equations Oper. Theory 51 (2005) 257-274.

[13] Ranges of normal and subnormal operators. Michigan Math. Journal. 18(1971) 33-36.

[14] A. L. Shields, Weighted shift operators and analytic function theory. American Mathematical Society. Mathematical surveys. 13 (1974) 49-128.

[15] J. E. Thomson, Approximation in the mean by polynomials. Annals of Math. J. 133 (1991) 477-507.

[16] L. Williams, Bounded point evaluations and the local spectra of cyclic hyponormal operators. Dynamic Systems and Applications 3 (1994) 103-112.

Bibliographie

Partie III

[1] Alexandru Aleman, *Hilbert spaces of analytic functions between the Hardy and the Dirichlet space.* Proceeding of the American mathematical society volume 115, Number, May 1992.

[2] H. Benazzouz · O. El-Fallah · K. Kellay · H. Mahzouli *Contact points and Schatten composition operators.* Math. Z. (279) (2015) no. 1-2 407-422

[3] A. Beurling, Ensembles exceptionnels. Acta. Math. 72 (1939), 1–13.

[4] L. Carleson, Selected Problems on Exceptional Sets. Van Nostrand, Princeton NJ, 1967.

[5] L.Carleson, *A representation formula for the Dirichlet integral,* Math.Z. 73 (1960), 190-196.

[6] J.G.Caughran, Polynomial approximation and spectral properties of composition operators on H^2, Indiana Univ. Math. J. 21, (1971), 81–84.

[7] T. Carroll, C. C. Cowen, Compact composition operators not in the Schatten classes. J. Operator Theory, 26 (1991) 109-120.

[8] C.C. Cowen, Composition operators on H^2, J. Operator Th. 9 (1983), 77– 106.

[9] J.Douglas, *Solution of the of the problem of plateau*, Trans. Amer. Math. Soc. 33 (1931), 263-321.

[10] O.El-Fallah , K.Kellay, J. Mashreghi, T.Ransford, *A self-contained proof of strong -type capacitary ineguality for the Dirichlet space.* Centre de recherche Mathématiques CRM Proceedings and Lectures Notes.

[11] O. El-Fallah, K. Kellay, M. Shabankhah, H. Youssfi. Level sets and Composition operators on the Dirichlet space. J. Funct. Anal. 260 (2011) 1721-1733.

[12] O. El-Fallah, M. El Ibbaoui, H. Naqos, Composition operators with univalent symbol in Schatten classes. J. Funct. Anal. 266 (2014), no. 3, 1547-1564.

[13] E. A. Gallardo-Gutiérrez, M. J. González. Exceptional sets and Hilbert-Schmidt composition operators. J. Funct. Anal. 199 (2003) 287-300.

[14] E. A. Gallardo-Gutiérrez, M. J. González, Hausdorff measures, capacities and compact composition operators. Math. Z. 253 (2006), 63–74.

[15] J. Garnett, Bounded analytic functions. Academic Press, New York, 1981.

[16] H. Henmalm, B.Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman Spaces.*

[17] M. Jones, Compact composition operators not in the Schatten classes. Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006) 1947-1953.

[18] M.Jovovic, B.MacCluer, *Composition operators on Dirichlet spaces*, Acta Sci. Math(Szegd) 63 (1997), 229-247

[19] K. Kellay, P. Lefèvre, Compact composition operators on weighted Hilbert spaces of analytic functions. J. Math. Anal. Appl. 386 (2) (2012) 718-727.

[20] J. P. Kahane, R. Salem. Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Hermann, Paris, 1963.

[21] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodriguez-Piazza. Approximation numbers of composition operators on the Dirichlet space. Arkiv for Matematik, 2012, 1-21.

[22] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodriguez-Piazza. Compact composition operators on the Dirichlet space and capacity of sets of contact points . J. Funct. Analysis. 624 (2013) no 4, 895–919.

[23] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodriguez-Piazza. Nevanlinna counting function and Carleson function of analytic maps. Math Ann. 351, no2 (2011), 305-326.

[24] P. Lefèvre, D. Li, H. Queffélec, L. Rodriguez-Piazza, Some examples of compact composition operators on H^2. J. Funct. Anal., Volume 255, Issue 11(2008), 3098-3124 .

[25] J.E.Littlewood, *On inequalities in the theory of functions,* Proc. London Math.Soc. 2. 23 (1925),481-519.

[26] D. H. Luecking and K. Zhu, Composition operators belonging to the Schatten ideals, Amer. J. Math. 114 (1992), 878–906.

[27] D. Li, H. Queffélec, L. Rodriguez-Piazza, Estimates for approximation numbers of some classes of composition operators on the Hardy space. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 38 (2) (2013), 547-564.

[28] H. Queffélec, K. Seip, Decay rates for approximation numbers of composition operators. J. Anal. Math. 2013, to appear.

[29] D. Luecking, Trace ideal criteria for Toeplitz operators, J. Funct. Anal. 73 (1987) 345-368.

[30] B. MacCluer, J. H. Shapiro, Angular derivatives and compact composition operators on the Hardy and Bergman spaces, Canadian J. Math. 38 (1986), 878-906.

[31] E.Nordgen, Composition operator, Canadian J. Math. 20 (1968), 442-449.

[32] J. Pau, P. A. Perez ,Composition operators acting on weighted Dirichlet spaces. J. Math. Anal. Appl. 401 (2013), no. 2, 682–694.

[33] J.V.Ryff, Subordinate H^p functions Duke Math. J.33(1966), 347–354.

[34] H.J.Schwartz, Composition operators on H^p. Thesis Univ. of Toledo, 1969.

[35] J. H. Shapiro, The essential norm of a composition operator. Annals of Math. 125 (1987) 375–404.

[36] J. H. Shapiro, Composition operators and classical function theory. Springer Verlag, New York 1993.

[37] K. J. Wirths, J. Xiao, Global integral criteria for composition operators. J. Math. Anal. Appl., 269 (2002), 702–715.

[38] Zhu K., Positive Toeplitz Operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetic domains. J. Operator Theory 20(1988), 329-357.

[39] K. Zhu, Operator theory in function spaces. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, 139, Marcel Dekker, Inc (1990).

[40] N.Zorboska, Composition operators on weighted Dirichlet spaces. Pro.Amer.Math. Soc.126 (1998), no. 7, 2013-2023.