NUMERO D'ORDRE: **2296**

THÈSE DE DOCTORAT

PRESENTEE PAR

NOM ET PRENOM : **ROUCHDI ILHAM**

DISCIPLINE : MATHEMATIQUES
SPECIALITE : THEORIE DU POTENTIEL.

TITRE : FONCTIONS FINEMENT BIHARMONIQUES ET APPROXIMATION DANS LES ESPACES BIHARMONIQUES.

SOUTENANCE LE : 09 MARS 2006.

DEVANT LE JURY,

PRESIDENT :
A. SAYAH, PES, FACULTE DES SCIENCES, RABAT.

EXAMINATEURS :

CH. BENSOUDA, PES, FACULTE DES SCIENCES, KENITRA.
M. CHADLI, PA, ECOLE NORMALE SUPERIEURE, FES.
M. EL KADIRI, PES, FACULTE DES SCIENCES, RABAT.
Z. E. GUENNOUN, PES, FACULTE DES SCIENCES, RABAT.
Z. E. ABDELALI , PH, FACULTE DES SCIENCES, RABAT.

Remerciements

Cette thèse a été effectue au sein de l'UFR "ANALYSE ET PROBABILITE3 de la faculté des sciences de Rabat.

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à mon directeur de thèse Monsieur Mohamed El Kadiri professeur à la facult des Sciences de Rabat Université Mohammed V,Agdal, pour la confiance qu'il m'a accordée, ainsi que pour la disponibilité et l'intérêt qu'il a bien voulu accorder à mes travaux.

Je tiens à présenter mes vifs remerciements à Madame Awatif Sayeh, professeur la faculté des Sciences de Rabat, Université Mohammed V, Agdal, de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.

J'exprime ma profonde gratitude au professeur Zine El Abidine Guennoun professeur à la faculté des sciences de Rabat, université Mohammed V, Agdal, d'avoir accépté d'être mon rapporteur de thèse et de m'avoir honnorée par sa présence parmi les membres du jury .

Je remercie le professeur Zine El Abidine Abdelali, d'avoir également accépté d'être mon examinateur et de m'avoir honnorée par sa présence parmi les membres du jury. Je tiens infiniment à le remercier pour ses conseils et son aide durant toute ces annèes de préparation de thèse.

Toute ma reconnaissance va aussi à monsieur Charaf Bensouda professeur à la faculté des sciences de Kénitra, Université Ibn Tofail, d'avoir accépté d'être mon rapporteur de thèse, et aussi de m'avoir honnorée par sa présence parmi les membres du jury. Je le remercie également pour sa générosité ainsi que pour ses conseils et ses encouragements tout au long de la préparation de cette thèse .

Je remercie également monsieur Mostafa Chadli d'avoir accépté d'être mon examinateur et de m'avoir honnorée par sa présence parmi les membres du jury.

Je suis très reconnaissante à Madame Chaoui pour tout le soutien moral et l'affection qu'elle m'a accordée durant toutes ces années de préparation de thèse.

Je remercie particulièrement le professeur M. El Yacoubi pour tout le temps et l'aide qu'il m'a accordé, ainsi que pour ses conseils et son soutien moral.

Je ne saurais oublier mes amis Monsieur Rachid El Harti et Monsieur Allal Ghanmi pour leur aide et à qui je souhaite un grand avenir.

Enfin je remercie mon père Ahmed Rouchdi, ma mère Sakina Sanhaji El Amrani pour toute leur compréhension et sacrifices sans lesquels cette thèse n'aurait pas vu la lumière, je remercie également mon oncle Moustafa Sanhaji El Amrani, ma tante Khadija Sanhaji El Amrani, mes soeures et frères ma cousine Khansae et mon cousin Mohammed Amine pour leurs soutien moral et matériel.

Je remercie également Madame Rabia et Monsieur Koubida de notre département de mathématiques et Informatique.

TABLE DES MATIÈRES.

Chapitre 0: INTRODUCTION.

La théorie du potentiel est une théorie dont les origines remontent au 18eme siècle, lorsque J. Lagrange remarqua en 1773 que les forces gravitationnelles[1] dérivent d'une fonction appelée plus tard par Green en 1828 "fonction potentiel" et tout simplement "potentiel" par Gauss en 1840. En 1782 Laplace montra que dans les régions de masse libre[2] cette fonction satisfait une équation aux dérivées partielles connue sous le nom de l'équation de Laplace[3].

S. Poisson en 1823 introduisit sa formule intégrale[4] pour la boule dans le but de résoudre le 1er Problème de la donnée frontière pour l'équation de Laplace appelé aussi dans la litterature "Problème de Dirichlet"[5]. Ce problème a ensuite suscité l'intérêt de plusieurs mathématiciens. En 1828, G. Green introduisit la fonction de Green[6] et l'utilisa pour résoudre le problème de Dirichlet pour des domaines à bord suffisament régulier. En 1839, Earnashaw prouva le principe du minimum[7] pour la solution de l'équation de Laplace. Harnack démontra vers l'année 1886 les inégalités d'Harnak[8] et déduisit la propriété de convergence[9] des suites monotonnes de fonctions qui sont solutions de l'équation de Laplace . Cette démonstration fut une grande contribution en théorie du potentiel.

Au début du 20eme siècle, les trois principes de base de la théorie du potentiel ont été établis : Problème de Dirichlet, principe du minimum et propriété de convergence, constituant ainsi ce qui est appelé aujourd'hui la théorie du potentiel classique.

L'étude de l'équation de Laplace dans $\mathbf{R}^n$(i.e, $\Delta u = 0$) a conduit vers les années 50 du siècle dernier à diverses théories axiomatiques des fonctions harmoniques, à savoir l'axiomatique de Brelot, Bauer, Constantinescu-Cornea et Doob. En effet, on s'est aperçu que plusieurs raisonnements de la théorie du potentiel classique étaient valables dans des conditions plus générales. Toutes ces axiomatiques reposent principalement sur la notion de fonction harmonique, et ont pour but d'etendre les résultats et méthodes classiques à une classe plus vaste d'équations aux dérivées partielles.

Un chapitre important de la théorie du potentiel est la théorie fine du potentiel. Cet aspect fin est apparu et développé avec l'introduction de la topologie fine en théorie du potentiel classique en 1940 par H. Cartan. Cette topologie est définie comme étant la moins fine des topologies rendant continues les fonctions surharmoniques dans $\mathbf{R}^n$. Les voisinages d'un point pour cette topologie sont les ensembles contenant ce point et dont le complémentaire est éffilé[(10)] en ce point. Cette topologie a été ensuite étendue aux cadre des diverses théories axiomatiques du potentiel. Cette extension et l'axiome de domination (en abrégé axiome (D), voir Chap. I) ont permis un développement considérable de ces théories, appelées aussi théories des espaces harmoniques, et à la théorie des fonctions finement harmoniques due à B. Fuglede. Le paragraphe qui suit traitera de cette théorie, ainsi que ces principaux résultats

La théorie des fonctions finement harmoniques due à B. Fuglede [8] a été introduite moyennant la théorie du balayage des mesures sur un espace harmonique, cette dernière qui a permis de définir la mesure harmonique ρ_x^V relative à un ouvert fin V (i.e ouvert pour la topologie fine) et un point $x \in V$. Cette mesure n'est rien d'autre que la balayée de la mesure de Dirac ϵ_x sur le complémentaire de V. Grâce à cette mesure, B. Fuglede a défini dans [8] la notion de fonctions finement harmoniques dans un ouvert fin d'un espace harmonique Ω de Bauer vérifiant l'axiome de domination (D) dans le but de généraliser la notion de fonctions harmoniques dans un ouvert ordinaire. Dans un tel espace, une fonction f définie sur un ouvert fin $U \subset \Omega$ est dite finement hyperharmonique si f est finement semi-continue inférieurement et $> -\infty$ dans U, et la topologie fine induite sur U admet une base $\mathcal{B}$ d'ouverts fins V tels que $\widetilde{V} \subset U$ et $f(x) \geq \int^* f d\epsilon_x^{CV}$, pour tout $x \in V$. Une fonction f est dite finement hypoharmonique si $-f$ est finement hyperharmonique, et f est dite finement harmonique si f et $-f$ sont à la fois finement hyperharmonique et finement hypoharmonique.

L'intêret de cette théorie apparaît aussi dans le problème d'approximation des fonctions continues sur un compact K de $\mathbf{R}^n$, par des restrictions à K de fonctions harmoniques ordinaires aux voisinages de K. Le premier travail réalisé dans ce sens a été démontré par Debiard et Gaveau [5] moyennant des outils probabilistes. Ce résultat affirme qu'une fonction f définie sur un compact K de $\mathbf{R}^n$, à valeurs réelles, est uniformément approchable sur K par des restrictions à K de fonctions harmoniques au voisinage de K si et seulement si f est continue sur K, et finement harmonique sur l'intérieur fin K' de K. Ce résultat a été ensuite généralisé par B. Fuglede au cas d'un espace harmonique à base dénombrable et vérifiant l'axiome de domination ([9], Th.4). B. Fuglede a donné également une version locale de ce théorème ([10], Th 4.1), qui permet de caractériser les fonctions finement harmoniques sur un ouvert fin. Signalons que ce théorème reste valable dans le cas d'un espace harmonique ne vérifiant pas l'axiome (D), résultat établi par Bliedtner et Hansen dans [1].

Les théories axiomatiques, où encore théories des espaces harmoniques, mentionnés précédement ne s'appliquent pas à des équations d'ordre supérieur comme le cas de l'équation biharmonique classique $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0$. Ceci a mené E.P. Smyrnelis à developper et étudier dans [12] et [13] une théorie axiomatique des fonctions biharmoniques s'appliquant à des équations du type $L_1 L_2 u = 0$, où L_1 et L_2 sont des opérateurs différentiels du second ordre, elliptiques ou paraboliques. Une notion importante, introduite par ce même auteur par analogie avec la théorie des fonctions harmoniques est la notion de balayée d'un couple de mesures sur un espace biharmonique noté X. Pour tout couple (μ, λ) de mesures de Radon positives sur X et toute partie E de X, il existe trois mesures de Radon positives μ^E, ν^E et λ^E sur X telles que, pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$, on ait

$$\int^* \widehat{P}_1^E d\mu = \int^* p d\mu^E + \int^* q d\nu^E, \quad \int^* \widehat{P}_2^E d\lambda = \int^* q d\lambda^E.$$

où $\widehat{P}^E = (\widehat{P}_1^E, \widehat{P}_2^E)$.

Le balayage de couples de mesures sur un espace biharmonique a donné naissance à une nouvelle théorie dite théorie des fonctions finement biharmoniques s'ajoutant ainsi à toutes ces théories du potentiel citées précédement. En effet, M. El Kadiri [6], en se plaçant dans un domaine fort de $\mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ et moyennant la notion de balayée d'un couple de mesures, introduit et définit la notion de couples finement hyperharmoniques, surharmoniques, et harmoniques. Il étabit ensuite les principales propriétés qui sont: la notion de balayée, principe du minimum et le probème de Riquier fin par analogie avec le problème de Dirichlet fin.

Dans [4], M. El Kadiri et M. Chadli montrent que l'intérêt de ces fonctions réside aussi, comme en théorie des fonctions finement harmoniques, dans l'approximation des fonctions continues sur un compact K par des restrictions à K de fonctions biharmoniques (i.e fonctions de classe C^4 solutions de l'équation biharmonique $\Delta^2 h = 0$) au voisinages de K. Le principal résultat dans leur travail affirme que pour une fonction f à valeurs réelles, définie sur un compact K de $\mathbf{R}^n$, on a les equivalences suivantes:

1. Il existe une suite (f_n) de fonctions biharmoniques, chacune définie sur un voisinage ouvert de K, telle que f_n converge uniformément sur K vers f, et (Δf_n) converge uniformément sur K vers une fonction g continue.

2. f est continue sur K et finement biharmonique sur l'intérieur fin de K, et Δf peut être prolongée par continuité à K.

Dans cette thèse, nous nous proposons de prolonger les résultats obtenus par M. El Kadiri dans [6] et [4] au cadre d'un espace biharmonique au sens de Smyrnelis [12] $(X, \mathcal{H})$ dont les espaces harmoniques associés $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$ sont supposés forts, vérifient l'axiome (D) et admettant la même topologie fine qu'on appelera la topologie fine de X. Ce choix d'une même topologie des espaces harmoniques permet d'avoir la locale connexité pour la topologie fine de X.

Dans un premier temps, nous étudions au chapitre 2 la notion de couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques et finement $\mathcal{H}$-harmoniques. Nous définissons dans la deuxième section de ce chapitre le triplet des mesures biharmoniques (Chap. 2, Déf 2.2.3), puis en faisant appel au Th 1.4.3 du chapitre 1 et théorème 2.2.4 du chapitre 2, nous donnons la formule explicite de la balayée d'un couple $\mathcal{H}$-surharmonique (Chap. 2, Prop 2.2.5) qui s'énonce comme suit : Pour tout couple (s, t) $\mathcal{H}$-surharmonique, et toute partie A de X on a l'égalité:

$$\widehat{(s,t)}^A = (\widehat{R}^A_{s-\mathcal{V}(\widehat{^2R^A_t})} + \mathcal{V}(^2\widehat{R}^A_t), ^2\widehat{R}^A_t).$$

Comme conséquence, on obtient à l'aide de l'axiome (D) les résultats suivants:

- Pour tout couple de fonctions (s, t) $\mathcal{H}$-surharmonique, et pour toutes parties A et B de X telles que $A \subset B$, on a $\widehat{(\widehat{(s,t)}^A)^B} = \widehat{(s,t)}^A$ (Chap. 2, Cor. 1)

- La mesure $\nu_x^{C^U}$ est portée par la frontière fine de l'ouvert fin U (Chap. 2, Cor. 2).

- La mesure $\nu_x^{C^U}$ ne charge pas les ensembles $\mathcal{H}$-polaires (Chap. 2, Prop 2.2.6).

Dans la section 3 du Chapitre 2, nous définissons la notion de couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique et finement $\mathcal{H}$-harmonique, et nous montrons que les propriétés de faisceau de la topologie fine sont vérifiées aussi par ces couples. Nous montrons également deux résultats importants :

- Le premier traite de l'aspect globale de l'hyperharmonicité fine des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques (Chap. 2, Th 2.3.3).

- Le deuxième affirme que les couples $\mathcal{H}$-hyperharmoniques sur un ouvert ordinaire de X, sont des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques (Chap. 2, Th 2.3.5).

La balayée d'un couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique est une question étudiée en section 4 du chapitre. 2 (Déf 2.4.1, prop. 2.4.2 et prop. 2.4.3). Dans la proposition 2.4.4, nous montrons à l'aide du Th. 11.8 de [8] que le couple balayé d'un couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique est égale au couple en dehors d'un ensemble $\mathcal{H}$-polaire. Nous prouvons ensuite en section 5 de ce même chapitre que le cône des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques muni de l'ordre spécifique est un treillis complétement réticulé (Chap. 2, Prop. 2.5.3). Cet ordre spécifique nous a permis après avoir etabli la propriété de décomposition de Riesz (voir corollaire de la section 5 du chapitre. 2) de démontrer que, $\widehat{(S+T)}^A = \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$ pour tous couples S et T finement hyperharmoniques (Chap. 2, Th. 2.5.2). Nous avons également établi un principe du minimum fin en section 6 du chapitre. 2 (voir proposition. 2.6.4).

La section 7 du chapitre 2 traite de la notion de fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 (Chap. 2, Déf. 2.7.2). Cette notion introduite, par analogie avec la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 en théorie des fonctions biharmoniques par Smyrnelis ([13],[14]), s'est averée importante vu son utilité. Cette fonction possède les principales propriétés suivantes :

- Elle est une fonction croissante (Chap. 2, Prop. 2.7.4).

- Elle permet de décomposer les couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques ≥ 0 (Chap. 2, Prop. 2.7.5).

- Elle est convergente pour les suites croissantes convergentes de fonctions finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques (Chap. 2, Prop. 2.7.7).

Toujours dans cette même section, nous définissons pour toute fonction f borélienne sur U le noyau borélien donné par:

$$\mathcal{V}_U f = \mathcal{V}(\overline{f}) - {}^1\widehat{R}_{\mathcal{V}(\overline{f})}|U$$

Ce noyau nous a permis d'établir les résultats suivants:

- La fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2, associée à une fonction v finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0, n'est rien d'autre que l'image de v par ce noyau (Chap. 2, Th 2.7.10).

- Un couple finement surharmonique sur X et localement borné inférieurement sur X est un couple surharmonique (Chap. 2, Th. 2.7.11).

Dans la section 8 du chapitre 2, nous donnons la preuve qu'un problème de Riquier fin convenablement posé admet une solution (Chap. 2, Th 2.8.1). Enfin la section 9, traite de la notion de fonctions finement biharmoniques et quelques propriétés de celle-ci. En premier lieu, nous avons etabli le résultat suivant:

Pour tout ouvert fin ω de X tel que $\overline{\omega} \subset X$ et tout $x \in \omega$, on a $\int d\nu_x^{C^\omega}$ (Chap.2, Lemme 2.9.1.). Ensuite, nous avons considéré la famille $D(U)$ des fonctions finement continues sur l'ouvert fin U, telles que la limite,

$$Lf(x) = \lim_{\omega \downarrow x} \frac{f(x) - \int f(y) d\epsilon_x^{C^\omega}(y)}{\int d\nu_x^{C^\omega}(y)}$$

existe et soit finie pour tout $x \in U$.

Par analogie avec la notion de fonction finement biharmonique classique introduite dans [4] par ses auteurs nous avons défini une fonction finement $\mathcal{H}$-biharmonique f sur U, comme étant une fonction appartenant à $D(U)$ et telle que Lf soit finement $\mathcal{H}_2$-harmonique (Chap. 2, Déf 2.9.2).

La notion de couple finement $\mathcal{H}$-biharmonique s'est avérée très liée à la notion de fonctions finement biharmoniques. En effet, si un couple (u, v) est finement

$\mathcal{H}$-biharmonique dans un ouvert fin U, alors $u \in D(U)$ et $Lu = v$ (Chap. 2, Prop. 2.9.3). De plus, une fonction $f \in D(U)$ est finement biharmonique si et seulement si (f, Lf) est un couple finement biharmonique (Chap. 2, Prop. 2.9.4). finalement, le lemme 2.9.5 de ce même chapitre donne une condition nécéssaire moyennant l'opérateur L, pour qu'une fonction soit $\mathcal{H}_1$-finement harmonique.

Tous ces résultats nous ont aidé dans l'étude du problème de l'approximation des fonctions continues sur les ensembles compacts de X. L'etude de ce problème fera l'objet du chapitre suivant de cette thèse (voir également la référence [7]).

Dans le chapitre 3, nous étudions le problème d'approximation des fonctions continues sur les ensembles compacts de X.

En section 2 de ce chapitre, nous montrons des propriétés des couples finement hyperharmoniques fins et des couples hypoharmoniques fins définis sur un ouvert fin U, en fonction de l'opérateur L (Chap. 3, Prop 3.2.1, cor 3.2.2 et cor 3.2.3). Le noyau $\mathcal{V}_U$ défini antérieurement, nous a permis de donner une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un couple de fonctions finement $\mathcal{H}$-biharmoniques soit un couple pur au sens de la définition 2.7.2 du chapitre. 2(Chap. 3, Prop 3.2.5).

Le théorème 3.3.4 présenté dans la 3^{eme} section et dont l'énoncé est donné ci-dessous est le principal résultat du chapitre 3:

Soit f une fonction à valeurs réelles sur un compact K. Alors f est uniformément approchable sur K par une suite (f_n) de fonctions $\mathcal{H}$-biharmoniques au voisinage de K, telle que Lf_n converge uniformément sur K vers une fonction continue g si et seulement si :

1. f est continue sur K.

2. f finement $\mathcal{H}$-biharmonique sur l'intérieur fin $K^{'}$ de K, et $Lf \in \overline{\mathcal{H}_2(K)}$.

Comme conséquence de ce théorème nous avons déduit une caractérisation des couples finement $\mathcal{H}$-biharmoniques sur un ouvert fin U (Chap. 3, Cor 3.3.6).

Les résultats obtenus dans les travaux [3] et [7] sont loin d'épuiser le sujet des fonctions finement biharmoniques, théorie introduite récemment par M.El Kadiri

[6]. Nous suggérons, par exemple, les perspectives suivantes :

1. Caractériser les fonctions continues uniformément approchables sur un compact de $\mathbf{R}^n$ par des fonctions "bi-surharmoniques$^{(11)}$".
2. Prolonger la notion de Morphisme finement biharmonique au cadre d'un espace biharmonique (le cas classique a été établi par M.El Kadiri). Prolongement qui s'avère interessant mais qui ne s'annonce pas sans difficultés.

Enfin, signalons qu'après cette introduction le présent rapport sera structuré comme suit :

* Le premier chapitre regroupera les définitions d'un espace harmonique, d'un espace biharmonique, de la topologie fine sur $\mathbf{R}^n$ ainsi que ses extentions aux espaces harmonique et biharmonique, la notion d'effilement et de polarité relativement à ces espaces, et finalement des rappels sur la théorie des fonctions finement harmoniques (voir, [8]) à laquelle nous avons fait appel pour réaliser [3], ainsi que des résultats sur l'approximation par les fonctions harmoniques .

* Le second, sera constitué principalement des résultats obtenus dans [3]. Il contiendra également une bréve introduction.

* Le troisième chapitre, sera composé aussi d'une introduction et des résultats obtenus dans [7].

* En derniér un quatrième chapitre, sous forme d'annexe auquel nous renvoyons pour la signification de tous les mots figurant dans cette thése et marqués par un chiffre dessus.

References

[1] J.Bliedtner and W.Hansen, Simplicial cônes in Potential Theory, Inventiones math.29, 83-110 (1975).

[2] J.Bliedtner and W.Hansen, Simplicial cônes in Potential Theory, Inventiones math.29, 83-110 (1975).

[3] C.Bensouda, M. El Kadiri, I.Rouchdi, Fonctions finement biharmoniques dans un espace biharmonique. (French) [Finely biharmonic functions in a biharmonic space] Rend. Mat. Appl. (7) 23 (2003), no. 1, 131–161.

[4] M. Chadli, M. El Kadiri, Uniforme Approximation of continuous function on compact sets by biharmonic functions comment.Math.Univ.Caralinea, 3 (2003) 427-435.

[5] A. Debiard et Gaveau, Potentiel fin et Algébre de Fonctions Analytiques, I,J.Funct .Anal 16 (1974), 289-304.

[6] M. El Kadiri, fonctions finement biharmoniques, Rend Accad.Sci XL Mem. Math.Appl (5) 24 (2000) 43-62.

[7] M. El Kadiri, I. Rouchdi, Approximation uniforme des fonctions continues sur les ensembles compacts d'un espace biharmonique.

[8] B. Fuglede, Finely harmonic functions, Lectures Notes in Math. 289,Springer, Berlin Heidelberg-New York, 1972.

[9] B. Fuglede Localization in fine potential theory and uniform Approximation by subharmonic fucntions, J.Funct.Anal. 49, (1982).

[10] B.Fuglede Fonctions harmoniques et fonctions finement harmoniques, Ann.Inst.Fourier, Grenoble 24,4 (1974), 77-91.

[11] P.M. Gauthier, S. Ladouceur, uniform approximation and Fine Potentail theory, journal of Approximation vol.72, 2 (1993), 138-14.

[12] E.P. Smyrnelis, Axiomatique des fonctions biharmoniques, 1er section, Ann.Inst. fourier,25,1, (1975) 35-97.

[13] E.P.Smyrnelis Axiomatiques des fonctions biharmoniques, 2eme section, Ann.Inst.Fourier, Tome 26,3, (1976) 1-47.

[14] E.P. Smyrnelis, Sur les fonctions hyperharmoniques d'ordre 2, Lect.Notes in Math. 681, springer Verlag- Heidelberg, 1978.

Chapitre I: Espaces harmoniques et espace biharmonique.

1.1 INTRODUCTION.

Le mot "Axiomatique", ou encore la méthode axiomatique est un mode d'exposi tion des sciences exactes fondé sur des propositions admises sans démonstration nettement formulées et des raisonnement rigoureux. L'axiomatique commence par un inventaire exhaustif de toutes les propositions que l'on admet sans démonstra tion, qu'on appelle axiomes ou parfois postulats et qui constituent le point de départ de la théorie que l'on se propose d'édifier.

En théorie du potentiel, les premières études axiomatiques généralisant la notion de fonctions harmoniques et surharmoniques dans des espaces topologiques plus au moins généraux, sont dues à G. Tautz (1949) et J.L. Doob (1954). En 1957, M. Brelot fonde sa théorie axiomatique, son approche axiomatique part en gros d'un espace localement compact, connexe et localement connexe muni d'un faisceau de fonctions réelles de fonctions finies continues, appelées harmoniques (axiome 1), on suppose qu'il existe une base d'ouverts réguliers, c'est-à-dire tels qu'il existe une solution du problème de dirichlet (axiome 2), et enfin (axiome 3) que tout ensemble filtrant croissant de fonctions harmoniques dans un domaine ω tend vers $+\infty$ ou une fonction harmonique. Cette théorie se développe considérablement si l'on ajoute le principe de domination (principe (D)) comme nouvel axiome.

En revanche, les solutions d'équations de type paraboliques ne vérifient pas les axiomes 3 et (D). Ainsi H. Bauer a été mené à modifier l'axiomatique de Brelot par l'introduction d'un nouvel axiome, et l'affaiblissement de l'axiome 3 (axiome de convergence) afin de contenir dans les applications les solutions d'équations de type paraboliques.

Les travaux que nous avons réalisé dans la présente thèse, ont été obtenus dans le cadre d'un espace biharmonique de Smyrnelis [11] et [12], dont les espaces harmoniques associés sont des espaces de Bauer. Dans la suite de ce chapitre nous rappelons les définitions d'un espace harmonique, un espace biharmonique, ainsi que quelques propriétés et notions importantes de ces espaces, telles que la notion de polarité et d'éffilement, l'axiome de domination (D), et la topologie fine en théorie du potentiel classique ainsi que ses extensions au cadre d'un espace harmonique et biharmonique. Nous rappelons également des résultats de la théorie des fonctions finement harmoniques de B. Fuglede dans le rôle est si essentielle en théorie des couples finement biharmoniques. On termine par des rappels de quelques résultats sur la théorie de l'approximation des fonctions continues sur les compacts.

1.2 ESPACE HARMONIQUE.

1.2.1 Faisceau Harmonique.

Soit $\mathcal{H}$ une application qui à tout ouvert U de X, fait correspondre un ensemble de fonctions définies sur U, noté $\mathcal{H}(U)$.

Définition 1.2.1.1.([5], p. 8) On dit que $\mathcal{H}$ est un faisceau si elle vérifie les conditions:

1. Propriété de restriction: Soient U et V, deux ouverts de X, tels que $U \subset V$, si $f \in \mathcal{H}(V)$ alors $f_{|U} \in \mathcal{H}(U)$.
2. Propriété de recollement: Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X. Une fonction f définie sur $\bigcup_{i\in I} U_i$ appartient à $\mathcal{H}(\bigcup_{i\in I} U_i)$, si pour tout $i \in I, f_{|U_i} \in \mathcal{H}(U_i)$.

Pour la suite, X désignera un espace topologique localement compact.

Définition 1.2.1.2.([5], p. 9) On dit qu'un faisceau $\mathcal{H}$ sur X est harmonique si, pour tout ouvert U de X, $\mathcal{H}(U)$ est un espace vectoriel réel de fonctions réelles continues sur U.

Définition 1.2.1.3. ([5],p. 9)Une fonction f définie sur un ensemble contenant un ouvert U de X, est dite $\mathcal{H}$-fonction si $f_{|U} \in \mathcal{H}(U)$.

1.2.2 Propriété de convergence d'un faisceau harmonique.([4], p.9)

On dira qu'un faisceau harmonique $\mathcal{H}$ sur X possède la :

a. Propriété de convergence de Bauer. (H. Bauer 1960,[1])

Si la limite d'une suite croissante (f_n) de $\mathcal{H}$-fonctions sur un ouvert de X, est une $\mathcal{H}$-fonction dès qu'elle est localement bornée.

b. Propriété de convergence de Doob. (J.L. Doob 1956, [6])
Si la limite d'une suite croissante de $\mathcal{H}$-fonctions sur un ouvert de X, est une $\mathcal{H}$-fonction dès qu'elle est finie sur un ensemble dense.

c. Propriété de convergence de Brelot. (M. Brelot 1957, [4]).
Si la limite d'une suite croissante de $\mathcal{H}$-fonctions sur un ouvert connexe de X, est une $\mathcal{H}$-fonction dès qu'elle est finie en un point.

Chacunes de ces propriétés, désigne un axiome dans l'approche axiomatique considérée par H. Bauer, J.L. Doob et M. Brelot. En effet elle est presque la seule distinction entre ces théories axiomatiques.

Remarque 1.2.2.1.([5], p. 10) Si X est localement connexe, alors la propriété de convergence de Brelot entraine la propriété de convergence de Doob, et cette dernière implique à son tour la propriété de convergence de Bauer.

Définition 1.2.2.2.([5], p. 11) Un faisceau harmonique $\mathcal{H}$ sur X, sera dit non-dégeneré en un point $x \in X$, s'il existe une $\mathcal{H}$-fonction définie sur un voisinage de x, tel que $h(x) \neq 0$.

Pour plus de details concernant les faisceaux harmoniques nous renvoyons à la référence [5].

1.2.3 Faisceau hyperharmonique.

Définition 1.2.3.1. ([5], p. 17) Un faisceau de fonctions $\mathcal{U}$ sur X est dit un faisceau hyperharmonique si pour tout ouvert U de X, $\mathcal{U}(U)$ est un cône convexe de fonctions numériques finies inférieurement et semicontinues inférieurement sur U.

Définition 1.2.3.2. ([5], p.17) Une fonction f définie sur un ensemble contenant un ouvert U, sera dite une $\mathcal{U}$-fonction si $f_{|U} \in \mathcal{U}(U)$.

Proposition 1.2.3.3. ([5], p. 17) L'application $U \longmapsto \mathcal{U}(U) \bigcap \mathcal{U}(-U)$ est un faisceau harmonique pour tout ouvert U de X. On la note $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$.

1.2.4 MP-ensemble et Ensemble résolutif.

Pour toutes les notions suivantes concernant les MP-ensembles et ensembles résolutifs, nous renvoyons à la référence [5].

Définition 1.2.4.1. Un ouvert U de X est dit un MP-ensemble (relativement à $\mathcal{U}$) lorsque toute $\mathcal{U}$-fonction f définie sur U est positive si:

1. $\forall K$ compact de X, $f \geq 0$ sur $X \setminus (U \cap K)$.
2. $\liminf\limits_{x \to y, x \in U} f(x) \geq 0, \quad \forall y \in \partial U.$

Soit $\mathcal{U}$ un faisceau hyperharmonique sur X, et U un MP-ensemble de X, et f une fonction numérique sur ∂U.

On note $\overline{\mathcal{U}}_f^U$ l'enveloppe suivante:

$\overline{\mathcal{U}}_f^U := \{u \in \mathcal{U}(U),\ u$ bornée inférieurement sur $U,\ u \geq 0\ sur X \setminus (U \cap K),$
$\forall K\ compact\ de\ X\ /\ \liminf\limits_{x \to y, x \in U} u(x) \geq f(y), \forall y \in \partial U\}.$

On pose $\underline{\mathcal{U}}_f^U := -\overline{\mathcal{U}}_{-f}^U$, $\overline{\mathcal{H}}_f^U := \inf \overline{\mathcal{U}}_f^U$ et $\underline{\mathcal{H}}_f^U := \sup \underline{\mathcal{U}}_f^U$.

Remarque 1.2.4.2. Si $\overline{\mathcal{U}}_f^U$ (resp $\underline{\mathcal{U}}_f^U$) est vide alors $\overline{\mathcal{H}}_f^U$ est égale à $+\infty$ (resp $\underline{\mathcal{H}}_f^U$ est égale à $-\infty$).

Proposition 1.2.4.3. La fonction $\overline{\mathcal{H}}_f^U$ vérifie les propriétés suivantes:

1. $-\overline{\mathcal{H}}_f^U = \underline{\mathcal{H}}_{-f}^U$.
2. $\underline{\mathcal{H}}_f^U \leq \overline{\mathcal{H}}_f^U$.
3. Si $f \leq g$ alors, $\overline{\mathcal{H}}_f^U \leq \overline{\mathcal{H}}_g^U$.
4. Si $\alpha \in \mathbf{R}_+$, alors $\overline{\mathcal{H}}_{\alpha f}^U = \alpha \overline{\mathcal{H}}_f^U$.

5. $\overline{\mathcal{H}}^U_{f+g} \leq \overline{\mathcal{H}}^U_f + \overline{\mathcal{H}}^U_g$.

Définition 1.2.4.4. Une fonction numérique f définie sur ∂U, est dite résolutive relativement à $\mathcal{U}$, si les fonctions $\overline{\mathcal{H}}^U_f$ et $\underline{\mathcal{H}}^U_f$ sont des $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$-fonctions et $\overline{\mathcal{H}}^U_f = \underline{\mathcal{H}}^U_f = \mathcal{H}^U_f$.

$\mathcal{H}^U_f$ est appelée la solution du Problème de Dirichlet.

Remarque 1.2.4.5 L'ensemble des fonctions finies qui sont résolutives, est un espace vectoriel réel.

Définition 1.2.4.6. Un ouvert U de X, est dit résolutif (relativement à $\mathcal{U}$), si toute fonction finie continue, à support compact sur ∂U, est résolutive.

Soit V un ensemble résolutif de X et $\mathcal{K}(\partial V)$ l'ensemble des fonctions finies continues sur ∂V à support compact. Pour tout $x \in X$ on définit l'application,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{K}(\partial V) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ f & \longrightarrow & \mathcal{H}^V_f(x) \end{array}$$

Cette application est une forme linéaire positive, elle définit une mesure sur ∂V, qu'on note μ^V_x.

Définition 1.2.4.7. La mesure μ^V_x, est appelée la mesure harmonique sur V au point x (relativement à $\mathcal{U}$).

Remarque 1.2.4.8. La notion de mesure harmonique a été introduite, en théorie du potentiel classique en 1932, par Ch. De la vallé Poussin.

1.2.5 Définition d'un espace harmonique.

Définition 1.2.5.1. ([5], p. 30) Un espace localement compact X muni d'un faisceau hyperharmonique $\mathcal{U}$ est un espace harmonique noté $(X,\mathcal{U})$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

* Axiome de positivité:
$\mathcal{H}_U$ est non dégeneré en tout point de X.

* Axiome de convergence:
$\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ possède la propriété de convergence de Bauer.

* Axiome de résolutivité:
Les ensembles résolutifs forment une base pour la topologie de X.

* Axiome de complétude:
Une fonction u semicontinue inférieurement, finie inférieurement sur un ouvert U de X appartient à $\mathcal{U}(U)$ si pour tout ensemble localement compact résolutif relativement à $\mathcal{U}$ tel que $\overline{V} \subset U$, on a $\mu^V u \leq u$ sur V, avec μ^V construite relativement à $\mathcal{U}$ et donnée par $\mu^V = (\mu_x^V)_{x \in V}$.

1.2.6 Support harmonique.

Soit X un espace harmonique fort au sens de Bauer. On rappelle d'abord qu'une fonction u sur un ouvert U de X est dite hyperharmonique si u est semi-continue inférieurment à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, et si tout point $x \in U$ possède un voisinage $U_x \subset U$, tel que pour tout ouvert régulier V, $\overline{V} \subset U_x$ et pour tout $y \in V$ on a

$$u(y) \geq \int^* u dw_y^V$$

La mesure w_y^V désigne la mesure harmonique (voire [3], page 38-39.)

Une fonction u définie sur U est dite harmonique sur U, si u et $-u$ sont hyperharmoniques sur U. De même on rappelle qu'une fonction hyperharmonique s est surharmonique sur un ouvert U de X si elle est finie sur un ensemble dense. Et finalement on rappelle qu'un potentiel sur un ouvert U est une fonction surharmonique positif dont toute minorante harmonique positive est identiquement nulle (voir [5], page 37).

Remarque 1.2.6.1. Un espace harmonique X est dit fort si, pour tout point $x \in X$, il existe un potentiel p fini continu tel que $p(x) > 0$.

Définition 1.2.6.2. ([8], p.18) Le support harmonique d'une fonction numérique f , qu'on note $\mathcal{S}(f)$, est le plus petit fermé F tel que f soit harmonique sur C_X^F.

1.2.7 Axiome de Domination.

Définition 1.2.7.1.([8], p. 18) On dit qu'une fonction f surharmonique ≥ 0 sur X vérifie la propriété de domination si pour toute fonction hyperharmonique u on a

$$u \geq f \ sur\ S(f) \Longrightarrow u \geq f \ sur\ X.$$

Définition 1.2.7.2. ([8], p.33) On dit que X vérifie l'axiome de domination si tout potentiel localement borné p sur X satisfait la propriété de domination. Plus précisément, si pour toute fonction hyperharmonique u on a l'implication suivante:

$$u \geq p \text{ sur } S(p) \Longrightarrow\ u \geq p \text{ sur } X.$$

Remarque 1.2.7.3. 1. Plusieurs formulations existent pour l'axiome de domination (voir [5], Th 9.2.1).
2. L'axiome de domination est une propriété locale, autrement dit tout sous-espace harmonique d'un espace harmonique vérifiant cet axiome , le vérifie relativement à son faisceau induit de fonctions harmoniques (voir [8], p. 32).

1.3 ESPACE BIHARMONIQUE.

Soit X un espace localement compact à base dénombrable et $\mathcal{U}$ l'ensemble des ouverts non vides de X, et $\mathcal{E}(U)$ l'espace des couples (u_1, u_2) de fonctions numériques sur E un sous-ensemble de X muni de l'ordre produit et des opérations usuelles, addition et multiplication par un réel.

1.3.1. Faisceau de couples de fonctions.

Soit $\mathcal{G}$ une application qui a tout ouvert U de X fait correspondre un ensemble de couples (u_1, u_2) de fonctions numériques définies sur U, noté $\mathcal{G}(U)$.

Définition 1.3.1.1 ([12], Déf 1.1) On dit que $\mathcal{G}$ est un faisceau sur X si elle vérifie les conditions suivantes :

a. Propriété de restriction : Pour tous ouverts U_1 et U_2 de X tels que $U_1 \subset U_2$, si $(f, g) \in \mathcal{G}(U_2)$ alors $(f, g)_{|U_1} \in \mathcal{G}(U_1)$, avec $(f, g)_{|U} = (f_{|U}, g_{|U})$.

b. Propriété de recollement: Pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$, $U_i \in \mathcal{U}$ et pour tout couple $(u_1, u_2) \in \mathcal{E}(U)$ avec $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Si $(u_1, u_2)_{|U_i} \in \mathcal{G}(U_i)$ pour tout i, alors $(u_1, u_2) \in \mathcal{G}(U)$.

Définition 1.3.1.2.([12], Déf 1.2) Un couple $(u_1, u_2) \in \mathcal{E}(U)$ avec $U \in \mathcal{U}$ est dit compatible dans U, si pour tout ouvert $U^{'}$ tel que $U^{'} \subset U$ on a $u_1 = 0$ dans $U^{'}$ implique $u_2 = 0$ dans $U^{'}$.

Définition 1.3.1.3.([12], p. 44) Un faisceau $\mathcal{H}$ sur X est dit biharmonique si l'application définie par $\mathcal{H} : U \longmapsto \mathcal{H}(U)$ associe à chaque $U \in \mathcal{U}$ un ensemble $\mathcal{H}(U)$ de couples (ordonnés) compatibles dans U qui forment un sous-espace vectoriel de couples de fonctions finies continues.

1.3.2 Ouvert $\mathcal{H}$-régulier. ([12], Déf 1.4)

Un ouvert ω relativement compact de X, avec $\partial\omega \neq \emptyset$ est dit $\mathcal{H}$-régulier si:

(i)- Pour tout couple de fonctions (f_1, f_2) finies continues sur $\partial\omega$ on associe un seul couple $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(\omega)$ tel que, $\lim\limits_{x\to z, x\in\omega} h_1(x) = f_1(z)$ et $\lim\limits_{x\to z, x\in\omega} h_2(x) = f_2(z)$, $\forall z \in \partial\omega$.

(ii)- Si $(f_1, f_2) \geq (0, 0)$ sur $\partial\omega$ alors $h_1 \geq 0$ dans ω, et si $f_2 \geq 0$ sur $\partial\omega$ alors $h_2 \geq 0$ dans ω.

Pour tout $x \in \omega$, il existe deux formes linéaires respectivement sur $\mathcal{C}(\partial\omega) \times \mathcal{C}(\partial\omega)$ et $\mathcal{C}(\partial\omega)$. La première s'ecrit comme somme de deux formes linéaires ≥ 0 sur $\mathcal{C}(\partial\omega)$ car $(f_1, f_2) = (f_1, 0) + (0, f_2)$. d'où un unique système $(\mu_x^\omega, \nu_x^\omega, \lambda_x^\omega)$ de mesures de Radon ≥ 0sur $\partial\omega$ tel que:

$$h_1(x) = \int f_1 d\mu_x^\omega + \int f_2 d\nu_x^\omega \ , \ h_2(x) = \int f_2 d\lambda_x^\omega.$$

1.3.3 Définition d'un espace biharmonique.([12], Déf 1.28)

Considérons les ensembles suivants:

$\mathcal{H}^*(U) \equiv$ l'ensemble des couples $\mathcal{H}-$ hyperharmoniques dans $U(voir[12])$.

$\mathcal{H}_1^*(U) \equiv \{v_1, (v_1, 0) \in \mathcal{H}^*(U)\}$.

$\mathcal{H}_2^*(U) \equiv \{v_2, \exists v_1\ ,\ (v_1, v_2) \in \mathcal{H}^*(U)\}$.

$\mathcal{H}_j(U) \equiv \mathcal{H}_j^*(U) \cap [-\mathcal{H}_j^*(U)],\ (j = 1, 2)$.

Un espace localement compact X à base dénombrable muni d'un faisceau biharmonique $\mathcal{H}$ qu'on note $(X, \mathcal{H})$, est dit espace biharmonique si les axiomes suivants sont vérifiés:

* Axiome. I :
$\mathcal{H}$ est un faisceau sur X. Un couple $(h_1, h_2) \in \mathcal{H}(U)$ est dit biharmonique sur U.

* Axiome. II :
Les ouverts $\mathcal{H}$-réguliers forment une base pour la topologie de X.

* Axiome. III :
a)- Les fonctions de $\mathcal{H}_1^*(X)$ séparent fortement X, et de même pour les fonctions de $\mathcal{H}_2^*(X)$.
b)- De plus, pour chaque ouvert non vide relativement compact U, il existe $h_1 \in \mathcal{H}_1(U)$ et $u_2 \in \mathcal{H}_2(U)$ strictement positives dans U.

* Axiome.IV : (axiome de convergence)
a)- Pour toute suite croissante $h_1^n \in \mathcal{H}_1(U)$, $U \in \mathcal{U}$ $(n \in \mathrm{N})$, si $\sup\limits_n\ h_1^n(x) < \infty$ sur un ensemble dense de U alors $\sup\limits_n h_1^n \in \mathcal{H}_1(U)$.
b)- Pour toute suite croissante $h_2^n \in \mathcal{H}_2(U)$, $U \in \mathcal{U}$, si $\sup\limits_n h_2^n < \infty$ sur un ensemble dense de U alors $\sup\limits_n h_2^n \in \mathcal{H}_2(U)$.

1.3.4 Couples $\mathcal{H}$-hyperharmoniques, couples $\mathcal{H}$-surharmoniques et couples $\mathcal{H}$-potentiel.

Définition 1.3.4.1. ([12], Déf 1.7) On dit que le couple (v_1, v_2) est $\mathcal{H}$-hyperharmonique sur un ouvert U de X si:
i)- $v_1,\ v_2$ sont s.c.i et $> -\infty$ dans U.
ii)- Pour tout ouvert ω $\mathcal{H}$-régulier $\subset \overline{\omega} \subset U$ et tout $x \in \omega$,

$$v_1(x) = \int v_1 d\mu_x^\omega + \int v_2 d\nu_x^\omega \ ,\ v_2(x) = \int v_2 d\lambda_x^\omega.$$

Définition 1.3.4.2.([12], Déf 5.1) Un couple de fonctions (s_1, s_2) $\mathcal{H}$-hyperharmonique sur un ouvert U est un couple $\mathcal{H}$- surharmonique, si s_1 et s_2 sont finies sur un ensemble dense de U.

Définition 1.3.4.3.([12], Déf 5.9) Un couple de fonctions $\mathcal{H}$-surharmonique positif est un $\mathcal{H}$-potentiel si pour tout couple (u_1, u_2) hyperharmonique, on a

$$(p_1, p_2) + (u_1, u_2) \geq (0, 0) \Longrightarrow (u_1, u_2) \geq (0, 0).$$

1.3.5 Espace biharmonique fort.([12], Déf 5.18)
Un espace biharmonique $(X, \mathcal{H})$ est dit fort si pour tout $x \in X$ il existe un $\mathcal{H}$-potentiel (p, q) fini continu sur X, tel que $(p, q)(x) > 0$ (i.e $p(x) > 0$ et $q(x) > 0$).

Remarque.([12], Rq 5.19) Si un espace biharmonique est fort, alors ses espaces harmoniques associés sont aussi forts.

Exemple. Soit Ω un domaine de R^n, $n \geq 1$. On note $\mathcal{H}_\Delta$ le faisceau biharmonique défini sur Ω par le Laplacien:

$$\mathcal{H}_\Delta(\omega) = \{(u, v) \in \left[C^2(\omega)\right]^2\ :\ \Delta u = -v, \Delta v = 0\}.$$

pour tout ouvert ω de Ω. Le couple $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est un espace biharmonique dont les espaces harmoniques associés sont identiques à l'espace harmonique classique défini par l'opérateur de Laplace sur Ω. On rappelle d'après [18] que l'espace biharmonique $(\mathrm{R}^n, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort si et seulement si $n \geq 5$. Par contre, si Ω est un domaine borné de R^n, l'espace biharmonique $(\Omega, \mathcal{H}_\Delta)$ est fort pour tout $n \geq 1$.

1.3.6 Balayée d'un couple de fonctions.

Pour tout couple $\phi = (f, g)$ de fonctions sur X, et toute partie E de X, on note Φ^E le couple réduit du couple Φ sur E défini par

$$\Phi^E = \inf\{(u, v) \in \mathcal{U}^+(X); (u, v) \geq \Phi \text{ sur} E\}$$

où l'inf est pris au sens de l'ordre produit et $\mathcal{U}^+(X)$ le cône des couples hyperharmoniques positives. Le couple balayé de Φ sur E est noté $\widehat{\Phi}^E$, et défini par $\widehat{\Phi}^E = (\widehat{\Phi}_1^E, \widehat{\Phi}_2^E)$, où pour une fonction h sur X, $\widehat{h}$ désigne la régularisée semicontinue inférieure de h, i.e la plus grande minorante semicontinue inférieurement de h dans X. On remarquera que l'on a $\Phi^E = (\Phi^+)^E$, où $\Phi^+ = max(\Phi, 0)$.

1.3.7 Balayage de couple de mesures.

Par analogie avec la théorie des espaces harmoniques, Smyrnelis a démonré le résultat suivant qui permet de calculer la balayée d'un couple de mesures: ([13], Th 7.11 et 7.12)

Pour tout couple (μ, λ) de mesures de Radon positives sur X et toute partie E de X, il existe trois mesures de Radon positives μ^E, ν^E et λ^E sur X telles que, pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$, on ait

$$\int^* \widehat{P}_1^E d\mu = \int^* p d\mu^E + \int^* q d\nu^E, \quad \int^* \widehat{P}_2^E d\lambda^E = \int^* q d\lambda^E.$$

où $\widehat{P}^E = (\widehat{P}_1^E, \widehat{P}_2^E)$.

Lorsque $\mu = \lambda = \epsilon_x$, $x \in X$, on notera les mesures μ^E, ν^E et λ^E correspondantes dans l'énoncé ci-dessus par μ_x^E, ν_x^E et λ_x^E respectivement.

1.3.8 Support biharmonique.([15],) Le support biharmonique d'un couple de fonctions numériques (f, g) , qu'on note $\mathcal{S}(f, g)$, est le plus petit fermé F tel que (f, g) soit biharmonique sur C_X^F.

1.3.9 Axiome de Domination dans un espace Biharmonique.

Définition 1.3.9.1.([17], Prop 1.1) On dit qu'un espace biharmonique $(X, \mathcal{H})$ vérifie l'axiome de domination si tout couple potentiel localement borné (p_1, p_2)

défini sur X vérifie pour tout couple surharmonique positif (s_1, s_2) sur X la condition suivante :
$s_j \geq p_j$ sur le support biharmonique de $(p_1, p_2) \Rightarrow s_j \geq p_j$ dans X (j=1,2).

Remarque 1.3.9.2. ([17], Th. 1.6) Si l'axiome de domination (D) est vérifié sur l'espace biharmonique $(X, \mathcal{H})$ alors il en est de même pour les espaces harmoniques associés. L'inverse est aussi vrai.

1.4 FONCTION HYPERHARMONIQUE PURE D'ORDRE 2.

Définition 1.4.1.([13], Déf 11.7) Soit v_2 une fonction $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 (i.e hyperharmonique relativement au faisceau $\mathcal{H}_2$) dans X; on appelle fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 (associée à v_2) le plus petit $v_1 \geq 0$ tel que (v_1, v_2) soit un couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique. Plus précisément, nous avons:

$$v_1 = \widehat{inf}\{u \ : \ (u, v_2) \in \mathcal{U}^+(X)\}.$$

Propriétés 1.4.2. ([14], Lem 8 et 9).

1. Soient u_2 et v_2 deux fonctions hyperharmoniques positives sur X. Si $u_2 \geq v_2$, alors les fonctions hyperharmoniques pures d'ordre 2 associées respectives satisfont à une inégalité dans le même sens.

2. Soit (v_n^1, v_n^2) une suite croissante de couples hyperharmoniques positifs sur X, où v_n^1 est la fonction hyperharmonique pure d'ordre associée à v_n^2 ($\forall n \in \mathbf{N}$). Alors, $\sup\limits_n v_n^1$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à $\sup\limits_n v_n^2$.

Dans la suite nous rappelons deux résultats dûs à Bouleau [4]:

Théorème 1.4.3. Il existe un noyau borélien unique $\mathcal{V}$ sur X ayant les propriétés suivantes:

1. Pour toute fonction finie continue $\varphi \geq 0$ à support compact sur X, la fonction $\mathcal{V}(\varphi)$ est $\mathcal{H}_1$-surharmonique, finie, continue et $\mathcal{H}_1$-harmonique dans le complémentaire du support de φ.

2. Pour toute fonction $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique $v \geq 0$ sur X, $\mathcal{V}(v)$ est la fonction hyperhamonique pure d'ordre 2 associés à v.

Remarque. Si f est une fonction borélienne ≥ 0 sur X, alors $\mathcal{V}f$ est $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique.

Théorème 1.4.4. Avec les notations du théorème 1.4.3, on a pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{U}^+(X)$,

$$\mathcal{V}(v) \prec u$$

i.e il existe une fonction $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique $t \geq 0$ telle que $u = \mathcal{V}(v) + t$.

1.5 POLARITÉ.

La notion d'ensemble polaire a été introduite en théorie du potentiel classique en 1941 par M. Brelot. Elle nous permet de mesurer la petitesse d'un ensemble, ainsi une propriété est dite vrai quasi-partout (en abrégé q.p) si elle est vraie en dehors d'un ensemble polaire. Par analogie avec la théorie classique cette notion a été étendue aux cadres des espaces harmoniques et espaces biharmoniques.

1.5.1 Polarité dans un espace harmonique.

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace harmonique au sens de Constantinescu et A. Cornea [5].

Définition 1.5.1.1.([5], p. 142) Un sous-ensemble A de X est dit polaire, s'il existe une fonction surharmonique s tel que $A \subset \{x \in X / s(x) = +\infty\}$.

Propriétés 1.5.1.2.([5], p. 142 et cor. 6.2.3) Les ensembles polaires vérifient les propriétés suivantes:

1. Tout sous-ensemble d'un ensemble polaire est polaire.
2. La réunion d'une famille dénombrable d'ensembles polaires est un ensemble polaire.

1.5.2 Polarité dans un espace biharmonique.

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique au sens de Smyrnelis [12].

Définition 1.5.2.1.([16], Déf. 1.1) Un sous-ensemble A de X est dit $\mathcal{H}$-polaire, s'il existe un couple (s_1, s_2) surharmonique positif tel que $A \subset \{x, s_j(x) = +\infty\}$

avec $j = 1, 2$.

Nous allons rappeler quelques résultats sur les ensembles $\mathcal{H}$-polaires.

Théorème 1.5.2.2.([16], Th. 1.9) Soit A un sous-ensemble de X, les propositions suivantes sont équivalentes:

1. A est $\mathcal{H}$-polaire.
2. A est $\mathcal{H}_1$-polaire et $\mathcal{H}_2$-polaire.

Proposition 1.5.2.3.([16], Cor. 1.10) Les ensembles $\mathcal{H}$-polaires vérifient les propriétés suivantes:

1. Un sous-ensemble d'un ensemble $\mathcal{H}$-polaire est $\mathcal{H}$-polaire.
2. Toute réunion dénombrable d'ensembles $\mathcal{H}$-polaires est $\mathcal{H}$-polaire.

1.6 EFFILEMENT.

L'effilement a été introduit en théorie du potentiel classique en 1939 par M. Brelot dont le plus grand interêt apparaît dans la caractérisation des voisinages d'un point pour la topologie fine définie comme étant les ensembles contenant le point et dont le complémentaire est éffilé en ce point, ce dernier résultat fut démontré par H. Cartan en 1940.

1.6.1 Effilement dans un espace harmonique.

Soit X un espace harmonique au sens de Constantinescu et A. Cornea [5].

Définition 1.6.1.1. ([3], p. 43) Un ensemble $E \subset X$ est dit éffilé en $x_0 \in X \setminus E$ si, $x \notin \overline{E}$ ou si $x \in \overline{E}$ et il existe une fonction v hyperharmonique definie sur un voisinage de x telle que, $v(x_0) < \liminf_{x \to x_0, x \in E} v(x)$.

Propriétés 1.6.1.2.([5],p. 149 et Th. 6.3.1) Les ensembles effilés vérifient les propriétés qui suivent:

1. Tout sous-ensemble d'un ensemble éffilé en un point x est éffilé en ce point.

2. Toute réunion finie d'ensembles effilés en un point x est éffilée en ce point.

1.6.2 Effilement dans un espace biharmonique.
X notera un espace biharmonique au sens de Smyrnelis [12].

Définition 1.6.2.1.([16], Déf. 2.1) Un sous-ensemble E de X est dit $\mathcal{H}$-éffilé en un point $x \in X \setminus E$, si $x \notin \overline{E}$ où $x \in \overline{E}$ et il existe un voisinage de x, et un couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique $(u_1, u_2) \geq (0, 0)$ tel que, $\liminf_{y \to x,\ y \in E} u_j(y) > u_j(x),\ j = 1, 2.$

Remarque 1.6.2.2. ([16], p. 258) Un ensemble $\mathcal{H}$-éffilé est evidement $\mathcal{H}_1$-éffilé et $\mathcal{H}_2$-éffilé.

Proposition 1.6.2.3.([16], Prop. 2.2) Les ensembles éffilés vérifient les propriétés suivantes:

1. Un sous-ensemble d'un ensemble $\mathcal{H}$-éffilé en x est aussi $\mathcal{H}$-effilé en x.

2. Une réunion finie d'ensembles $\mathcal{H}$-éffilés est $\mathcal{H}$-éffilée.

Théorème 1.6.2.4.([16], Th. 2.9) Soient un ensemble $E \subset X$, et x un point X, alors les conditions suivantes sont équivalentes:

1. L'ensemble E est $\mathcal{H}$-éffilé en x.

2. L'ensemble E est $\mathcal{H}_1$-éffilé et $\mathcal{H}_2$-éffilé en x.

1.7 TOPOLOGIE FINE

La topologie fine a été introduite en théorie du potentiel classique par H.Cartan en 1940, comme étant la moins fine des topologies qui rend continues les fonctions sousharmoniques. On en déduit que pour toute fonction sousharmonique u, et $c \in \mathrm{R}$, les ensembles $\{u < c\}$ et $\{u > c\}$ sont des ouverts fins, et l'application "$s : x \to \|x - a\|$", $a \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$, est une fonction sousharmonique (i.e $\Delta s \geq 0$, au sens des distributions), par conséquent pour tout $r > 0$, la boule $B(a, r)$ de centre a et de rayon r est un ouvert fin. On en déduit que la topologie fine est plus fine que la topologie usuelle sur R^{n}, $n \geq 1$. Cette condition s'exprime de la manière suivante:

$$Id : (\mathrm{R}^{\mathrm{n}}, \tau_{\mathrm{f}}) \mapsto (\mathrm{R}^{\mathrm{n}}, \tau_{\mathrm{u}})$$

est une application continue, avec τ_u la topologie usuelle sur $\mathrm{R^n}$, et τ_f la topologie fine sur $\mathrm{R^n}$.

La topologie fine bien qu'elle soit séparée et localement connexe, elle n 'est pas localement compacte (voir [11], page 208). Elle possède également la propriété de Baire :
"Soit $(O_n)_{n\in \mathrm{N}}$ une suite d'ouverts fins, qui sont finement denses dans $\mathrm{R^n}$, alors $\cap_n O_n$ est finement dense dans $\mathrm{R^n}$".
Cette topologie ne vérifie pas la propriété Lindelöf, cependant elle possède une propriété semblable dite "quasi-Lindelöf", qui s'annonce comme suit:
"Pour toute famille d'ouverts fins, $(O_i)_{i\in I}$ on peut trouver une sous-famille dénombrable telle que , $\cup_{i\in I} O_i = \cup_{j\in J} O_j \cup P$, avec $J \subset I$, J dénombrable, et P un ensemble polaire."

1.7.1 Topologie fine sur un espace harmonique.

On notera toujours par X un espace harmonique au sens de Constantinescu et A. Conea [5]. D'après N. Boboc, C. Constantinescu et A. Cornea [3] la topologie fine sur X est la moins fine des topologies pour laquelle toute fonction hyperharmonique est continue. Ainsi, pour tout ouvert U de X, et toute fonction s hyperharmonique sur X, et α un nombre réel, les ensembles $\{x \in U : \ s(x) < \alpha\}$ sont des ouverts pour cette topologie, appelés ouverts fins.

Proposition 1.7.1.1. ([3], Lem. 2.1) Soit A un sous- ensemble de X et $x \in A$. A est un voisinage fin de x si et seulement si $X \setminus A$ est éffilé en x.

Proposition 1.7.1.2. ([3], Lem. 2.2) Tout point de X admet un système fondamental de voisinages fins compacts en topologie initiale.

Proposition 1.7.1.3. ([5], Cor 5.1.1) L'espace harmonique X muni de la topologie fine est un espace de Baire. i.e si $(O_n)_{n\in \mathrm{N}}$ est une suite d'ouverts fins finement denses dans X, alors $\cap_n O_n$ est finement dense dans X.

Si l'espace harmonique X est fort et vérifie l'axiome de domination (D), alors la topologie fine sur X est localement connexe. Ce résultat a été obtenu par B.

Fuglede ([8], Chap. 9.11)

1.7.2 Topologie fine sur un espace biharmonique.

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort au sens de [12], $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$ les espaces harmoniques associés. On notera par θ_f^1 et θ_f^2 les topologies fines respectives de $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$. Sur l'espace X on considère la famille de tous les ensembles $G \subset X$ tels que C^G est $\mathcal{H}$-éffilé en tout point $x \in G$ qu'on note θ_φ.

Pour tout $x \in X$, on considère les ensembles suivants:
$\mathcal{A}_\varphi(x) = \{G \in \theta_\varphi,\ x \in G\}$.
$\mathcal{A}_1(x)$: Le système de voisinages associés à θ_f^1.
$\mathcal{A}_2(x)$: Le système de voisinages associés à θ_f^2.

Théorème 1.7.2.1.([16], Th. 2.24) θ_φ est une topologie sur X plus fine que la topologie initiale, et l'on a $\theta_\varphi = \theta_f^1 \cap \theta_f^2$.

Remarque 1.7.2.2. ([16], Th. 2.24) Le théorème précédent permet d'en deduire la caractérisation qui suit des ouverts de θ_φ:
Un sous-ensemble O de X est un ouvert pour θ_φ si et seulement si O est un ouvert pour θ_f^1 et θ_f^2.

Théorème 1.7.2.3.([16], Th. 2.24)

1. $\theta_\varphi \subset \theta_f^j$, $j = 1, 2$.
2. $\mathcal{A}_\varphi(x) \subset \mathcal{A}_1(x) \cap \mathcal{A}_2(x) \subset \mathcal{A}_j(x)$, $j = 1, 2$.

Proposition 1.7.2.4 ([16], Cor. 2.25) Soit U un sous-ensemble de X. Alors,

$$U \in \mathcal{A}_\varphi(x) \Longleftrightarrow U = U_1 \cap U_2,\ \text{où } U_j \in \mathcal{A}_j,\ j = 1, 2.$$

1.8 FONCTION FINEMENT HARMONIQUE ET POTENTIEL FIN.

X désignera un espace harmonique vérifiant les conditions de [8], et pour toute ouvert V de X, $\widetilde{V}$ notera l'adhérence de V par rapport à la topologie fine, et $\partial_f V$ notera la frontière fine de V par rapport à la topologie fine.

Définition 1.8.1.([8], Déf. 8.1) Une fonction f définie sur un ouvert fin $U \subset X$, est dite finement hyperharmonique (dans U) si f est finement semicontinue inférieurement et $> -\infty$ dans U et si la topologie fine induite sur U, admet une base d'ouverts fins ω, tel que $\widetilde{\omega} \subset U$ et $f(x) \geq \int^* f d\epsilon_x^{C\omega}$ pour tout $x \in \omega$.

Rappelons que la mesure $\epsilon_x^{C\omega}$ ([8], Déf 0.1) est portée par la frontière fine $\partial_f \omega \subset U$, et ne charge pas les ensembles polaires ([8], Déf 0.1).

Définition 1.8.2. ([8], Déf. 8.2) Une fonction f définie sur un ouvert fin $U \subset X$, est dite finement hypoharmonique, si $-f$ est finement hyperharmonique.

Définition 1.8.3. ([8], Déf. 8.3) Une fonction f définie sur un ouvert fin U de X, est dite finement harmonique (dans U) si f est finement continue sur U, et si la topologie fine induite sur U admet une base d'ouverts fins ω, telle que $\widetilde{\omega} \subset U$ et f soit intégrable relativement à $\epsilon_x^{C\omega}$ et $f(x) = \int^* f d\epsilon_x^{C\omega}$ pour tout $x \in \omega$.

Théorème 1.8.4. ([8], Th. 9.4) Soit U un ouvert fin de X et f une fonction définie et finement semicontinue inférieurement sur $\widetilde{U}$ et finement hyperharmonique dans U. Si de plus il existe un potentiel p semi-borné ([8], Th 2.2) tel que $f \geq -p$ dans U. Alors, $f(x) \geq \int^* f d\epsilon_x^{C^U}$, tout point $x \in U \cap [p < +\infty]$.

Théorème 1.8.5.([8], Th. 9.8) Soit u une fonction définie sur un ouvert ordinaire U de X. On a les equivalences suivantes:

1. u est hyperharmonique si et seulement si u est finement hyperharmonique et localement bornée inférieurement (pour la topologie initiale).

2. u est harmonique si et seulement si u est finement harmonique et localement bornée (pour la topologie initiale).

Corollaire 1.8.6.([8], Chap 9.11) Si X est un espace harmonique fort vérifiant l'axiome (D). La topologie fine sur X est localement connexe.

Théorème 1.8.7.([8], Th. 9.14) Soit u une fonction finement hyperharmonique sur $U \backslash e$, où e est un sous-ensemble polaire de U. Alors, u admet un prolongement à U finement hyperharmonique si et seulement si u est bornée inférieurement au voisinage de tout point de e. De plus ce prolongement est unique et il est donné par, $u(y) = f - \lim_{x \to y, x \in U \setminus e} u(x)$ pour tout $y \in e$.

Proposition 1.8.8.([8], Lem 10.1) Soit u une fonction finement hyperharmonique sur un ouvert fin U et v une fonction finement hyperharmonique sur un ouvert fin V. Supposons que $V \subset U$ et que $f - \liminf_{x \to y, x \in V} v(x) \geq u(y)$, $\forall y \in U \cap \partial_f V$. Alors, la fonction ω définie comme suit:

$$w(x) = \begin{cases} \min\{u(x), v(x)\} & si \;\; x \in V. \\ u(x) & si \;\; x \in U \setminus V. \end{cases} .$$

est finement hyperharmonique sur U.

On rappelle qu'un potentiel p sur X est dit semi-borné, s'il existe une suite (p_n) de potentiels localement bornés telle que $p = \sum_n p_n$. Et pour tout ensemble $A \subset X$ et toute fonction f définie sur un sous-ensemble E de X, la fonction $f^A(x) = \int f d\epsilon_x^A$ est définie sur l'ensemble des points x de X, tel que l'intégrale à droite existe.

Théorème 1.8.9([8], Th 10.2) Soit u une fonction finement hyperharmonique sur un ouvert fin U, et V un ouvert fin régulier tel que $\tilde{V} \subset U$, et supposons qu'il existe un potentiel p semi-borné fini sur X tel que $u \geq -p$ sur U. Alors, u^{C^V} (définie sur U) est la plus petite fonction finement hyperharmonique dans U, qui est $\geq u$ sur $U \setminus V$ et $\geq -p$ dans V. De plus, u^{C^V} est finement harmonique dans $V \cap [u^{C^V} < +\infty]$ ($u^{C^V} \leq u$ dans U, $u^{C^V} = u$ dans $U \setminus V$).

Définition 1.8.10. ([8], Déf. 11.4) Soit U un ouvert fin et A un sous-ensemble de U. Pour toute fonction f définie au moins sur A, on définit la réduite de f relativement à U, qu'on note R_f^U par:

$$R_f^U = \inf\{u(x)/u \in \mathcal{U}(U),\ u \geq f \ surA\}.$$

la balayée est notée par $\widehat{R}_f^U$, i.e la régularisée finement semicontinue inférieurement de R_f^U.

Théorème 1.8.11. ([8], Th. 11.8) Pour toute fonction $f \geq 0$ à valeurs réelles sur un ouvert fin U, $\widehat{R}_f = R_f$ q.p (i.e en dehors d'un ensemble polaire).

Théorème 1.8.12. ([8], Th. 12.9) Pour toute fonction finement hyperharmonique sur un ouvert fin U. On a les équivalences:

1. u n'est pas identiquement $+\infty$, sur aucune composante fine de U.
2. u est finie sur un ensemble finement dense de U.
3. u est finie quasi partout sur U.

Soit U un ouvert fin de X. On note $\mathcal{U}_f^i(U)$ l'ensemble des fonctions finement hyperharmoniques u dans U, tels qu'il existe un potentiel semi-borné p sur X tel que $u \geq -p$.

Si f est une fonction définie sur $\partial_f U$, on pose:

$$\overline{H}_f^U = \inf\{u \in \mathcal{U}_f^i(U)/f - \liminf_{x\to y, x\in U} u(x) \geq f(y), \forall y \in \partial_f U\}$$

On pose aussi: $\underline{H}_f^U = -\overline{H}_{-f}^U$.

Une fonction f sur $\partial_f U$ est dite finement résolutive si:
$-\infty < \underline{H}_f^U(x) = \overline{H}_f^U(x) < +\infty$ pour tout $x \in U$. Pour plus de détails concernant le problème de dirichlet fin on renvoie à la réference [8], page 173-174.

Théorème 1.8.13. ([8], Th. 14.6) Soit U un ouvert fin, et f une fonction définie sur $\partial_f U$. Alors, $\overline{\mathcal{H}}_f^U(x) = \int^* f d\epsilon_x^{C^U}$; $\underline{\mathcal{H}}_f^U(x) = \int_* f d\epsilon_x^{C^U}$ avec $x \in U$.

Définition 1.8.14. ([8], Déf. 3.3) On appelle base d'un ensemble A de X l'ensemble défini par:

$$b(A) = \{x \in X/\epsilon_x^A = \epsilon_x\}.$$

Remarque.([8], p. 26) A est dit éffilé en un point $x \in X$ si $x \in C^{b(A)}$.

Théorème 1.8.15. ([8], Th 14.7) Soit U un ouvert fin, et f une fonction définie sur $b(\partial_f U)$. Si $|f| \leq p$ sur $b(\partial_f U)$ avec p un potentiel semi-borné fini sur X. Alors on a,

$$f - \lim_{x\to y, x\in U} \overline{\mathcal{H}}_f^U(x) = f - \lim_{x\to y, x\in U} \underline{\mathcal{H}}_f^U(x) = f(y)$$

pour tout point régulier de la frontière fine, $y \in b(\partial_f U)$, où f est finement continue.

1.9 APPROXIMATION UNIFORME DES FONCTIONS CONTINUES SUR LES ENSEMBLES COMPACTS.

Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$. Debiard et Gaveau [7] ont montré le résultat sui vant:

Théorème 1.9.1. ([7], Th. 1)Toute fonction à valeurs réelles f définie sur K est uniformément approchable par une suite de fonctions harmoniques au voisinages de K si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:

1. f est continue sur K.
2. f est finement harmonique sur l'intérieur fin $K^{'}$ de K.

Ce théorème reste valable même pour le cas d'une fonction réelle définie sur un ensemble fermé de $\mathbf{R}^n$. Ce résultat a été établi par Gauthier et la douceur [10] plus précisément:

Théorème 1.9.2. ([10], Th. 1) Toute fonction f à valeurs réelles définie sur un fermé F de $\mathbf{R}^n$ est uniformément approchable sur F par une suite de fonctions harmoniques au voisinages de F si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiés:

1. f est continue sur F.
2. f est finement harmonique sur l'intérieur fin $F^{'}$ de F.

Soient X un espace harmonique à base dénombrable vérifiant l'axiome (D), et K un ensemble compact de X, B. Fuglede a montré que le théorème de Debiard et Gaveau reste valable. En effet:

Théorème 1.9.3. ([8], Th. 4) Une fonction à valeurs réelles f définie sur un compact K de X est uniformément approchable sur K par une suite de fonctions harmoniques au voisinages de K si et seulement si:

1. f est continue sur K.

2. f est finement harmonique sur l'intérieur fin $K^{'} de$ K.

Une généralisation de ce théorème (toujours pour le cas harmonique) aux espaces harmoniques ne vérifiant pas l'axiome (D) a été donnée par Bliedtner et Hansen ([2], Th 3.15).

1.10 NOTATIONS.

Avant de finir avec ce chapitre de rappels nous signalons que les notations que nous allons utilisé dans le reste de cette thèse seront comme suit:

$(X, \mathcal{H})$ désignera toujours, sauf mention expresse du contraire, un espace biharmonique fort au sens de [12], dont les espaces harmoniques associés seront notés $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$ et satisfont l'axiome de domination (D), et sont munis de la même topologie fine qu'on appelera topologie fine de X.

Le mot fonction signifiera toujours une fonction à valeurs dans $\overline{\mathrm{R}}$. L'ordre sur l'ensemble des couples de fonctions définis sur une partie de X, est l'ordre produit ordinaire défini de la manière suivante,

$$(f, g) \leq (h, k) \iff f \leq h \text{ et } g \leq k.$$

$$(f, g) < (h, k) \iff f < h \text{ et } g < k.$$

Si $(f, g) \geq (0, 0)$ (resp $(f, g) > (0, 0)$) on ecrira simplement $(f, g) \geq 0$ (resp $(f, g) > 0$).
Soient $F = (f, g)$ et $G = (h, k)$ deux couples de fonctions; on pose $min(F, G) = (min(f, h), min(g, k))$ (resp $max(F, G) = (max(f, h), max(g, k))$), où pour deux fonctions u et v, la fonction habituellement notée $min(u, v)$ (resp $max(u, v)$) est définie par $min(u, v)(x) = min(u(x), v(x))$).

Les ouverts pour la topologie (fine) considérée sur X seront appelés ouverts fins, et toutes les notions relatives à cette topologie seront précédées du mot fin (ou finement), par exemple ouvert fin, f-s.c.i, f-s.c.s, f-lim, f-liminf, finement ouvert, finement connexe .... On notera egalement pour toute partie A de X, $\widetilde{A}$ et $\partial_f A$ l'adhérence fine de A et la frontière fine de A.

Si f est une fonction définie sur une partie A de X. On note ${}^jR_f^A$ et ${}^j\widehat{R}_f^A$, $j = 1, 2$ respectivement la réduite et la balayée de f sur A dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_j)$.

References

[1] H. Bauer, Une axiomatique du problème de Dirichlet pour certaines équations elliptiques et paraboliques. C. R. Accd. Sci. Paris 250, 2672-2674 (1960).

[2] J. Bliedtner and W. Hansen, Simplicial cônes in Potential Theory, Inventiones math.29, 83-110 (1975).

[3] N. Boboc,C.Constantinescu-A.Cornea,Axiomatic theory of harmonic functions, balayage Ann.Inst.Fourier, Grenoble 15, 2 (1965), 37-70.

[4] M. Brelot, Lecture on Potential theory. Tata Institute of Fundamental Research. Bombay 1960.

[5] C. Constantinescu-A. Cornea, Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer-Verlag Heidelberg, 1972.

[6] J.L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem. In: Proc. 3dr Berkeley Sym. on Math. Stat. and Prob, 1954-55, p. 49-80. Berkeley: University of California.

[7] A. Debiard et Gaveau, Potentiel fin et Algébre de Fonctions Analytiques, I,J.Funct .Anal 16 (1974), 289-304.

[8] B. Fuglede, Finely harmonic functions, Lecture Notes in Math., 289, Springer-Verlag, 1972.

[9] B. Fuglede Localization in fine potential theory and uniform Approximation by subharmonic fucntions, J.Funct.Anal. 49, (1982).

[10] P.M. Gauthier, S. Ladouceur, uniform approximation and Fine Potentail theory, journal of Approximation vol.72, 2 (1993), 138-140.

[11] Helms L.L, Introduction to Potential Theory, Wiley. Interscience, 1969.

[12] E.P. Smyrnelis, Axiomatique des fonctions biharmoniques, 1er section, Ann.Inst. fourier,25,1, (1975) 35-97.

[13] E.P. Smyrnelis, Axiomatiques des fonctions biharmoniques, 2e section, Ann Inst. Fourier, tome 26,3, (1976) 1-47.

[14] E.P. Smyrnelis, sur les fonctions hyperharmoniques d'ordre 2, Lect.Notes in Math. 681, springer Verlag- Heidelberg, 1978.

[15] E.P. Smyrnelis, Support biharmonique et support harmonique associé, Lecture. Notes in Math. 787, Springer Verlag Heidelberg, 1980.

[16] E.P. Smyrnelis, Polarité et effilement dans les espaces biharmoniques. Séminaire de théorie du Potentiel, Paris, n 3, Lecture Notes in Math, n 68, Springer-Verlag, 1978.

[17] E.P. Smyrnelis, Axiome de domination dans les espaces biharmoniques. Université Paris VI, Séminaire de théorie du potentiel.

[18] M. EL Kadiri, Representation integrale dans le cadre de la théorie des fonctions biharmoniques, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. (1997).

Chapitre II: Fonctions finement biharmoniques .

2.1- Introduction.

N. Boboc, C. Constantinescu et A. Cornea ont montré le résultat suivant ([6], Lem. 4.4.): Si X est un espace harmonique au sens de [9], pour toute mesure de Radon positive μ sur X, et tout sous-ensemble A de X il existe une unique mesure notée μ^A telle que pour tout potentiel fini continu on a:

$$\int p \; d\mu^A = \int \widehat{R}_p^A d\mu$$

Ce résultat a permi, en particulier, de définir la balayée de la mesure harmonique ρ_x^ω relative a un ouvert fin ω, i.e ouvert pour la topologie fine, introduite en théorie du potentiel classique en 1940 par H. Cartan comme une reformulation de la notion d'éffilement. Cette balayée est donnée par la formule, $\rho_x^\omega = \epsilon_x^{C\omega}$ pour tout ouvert fin ω et tout point $x \in \omega$, avec $\epsilon_x^{C\omega}$ la balayée de la mesure de Dirac sur le complémentaire de ω.

Il est alors naturel d'étendre la notion d'harmonicité et d'hyperharmonicité au cas de fonctions définies sur un ouvert fin de X. Cette extension connue par la théorie des fonctions finement harmoniques a été introduite et developpée par B. Fuglede [14]. Outre la définition de la notion de fonction finement harmonique, fonction finement surharmonique et potentiel fin.... Cette théorie a fourni grâce à l'axiome de domination deux résultats importants le premier est la locale connexité de la topologie fine, et le deuxième toute fonction finement hyperharmonique est finement continue.

Par analogie avec cette théorie, M. El Kadiri [13], moyennant le balayage de couple de mesures sur un espace biharmonique développe une théorie dite théorie des couples finement biharmoniques sur un ouvert fin de $\mathbf{R}^n$, prolongeant la notion de fonctions finement harmonique sur un ouvert fin. Dans la présente thèse nous avons prolongé les résultats obtenus dans [13], au cadre d'un espace biharmonique $(X, \mathcal{H})$ dont les espaces harmoniques associés $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$ sont munis de la même topologie fine appelée topologie fine de X, et satisfont l'axiome de domination (D), qui demeure indispensable pour le développement de la théorie des couples finement biharmoniques. Dans la suite de ce chapitre nous donnons les résultats obtenus dans [7].

2.2- Mesures biharmoniques.

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique au sens de [21] d'espaces harmoniques associés $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$. On note $\mathcal{U}^+(X)$ le cône des couples hyperyharmoniques positifs sur X.

Si A est une partie de X, on note $\overline{A}$ l'adhérence de A dans le compactifié d'Alexandroff de X.

On note $P(X)$ (resp. $P_1(X)$, resp $P_2(X)$) le cône des $\mathcal{H}$-(resp.$\mathcal{H}_1$- resp. $\mathcal{H}_2$)-potentiels et on pose

$$P_2^{'}(X) = \{q \in P_2(X)/\exists p \in P_1(X) : (p, q) \in P(X)\}$$

lemme 2.2.1. Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace biharmonique fort. Alors, tout $\mathcal{H}_2$- potentiel q est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante (q_n) d'éléments de $P_2^{'}(X)$.

Démonstration. Soit $(p^{'}, q^{'})$ un potentiel tel que $p^{'} > 0$ et $q^{'} > 0$. Il est facile de vérifier que la suite (q_n) définie par $q_n = min(q, nq^{'})$ répond aux conditions du lemme .

Si les mesures μ et λ considérées au chapitre 2, 1.3.7, vérifient $\mu = \lambda = \epsilon_x,\ x \in X$, on notera pour toute partie E de X les mesures μ^E, ν^E, λ^E correspondantes dans ce théorème par μ_x^E,ν_x^E, et λ_x^E respectivement.

Proposition 2.2.2. Pour tout ouvert fin ω de X, et tout $x \in \omega$, on a $\mu_x^{C^\omega} = \epsilon_x^{1,C^\omega}$ et $\lambda_x^{C^\omega} = \epsilon_x^{2,C^\omega}$, où ϵ_x^{j,C^ω}, $j = 1, 2$ est la balayée de la mesure ϵ_x sur C^ω dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_j)$.

Démonstration . En appliquant le résultat 1.3.7 du chapitre précédent aux couples $P = (p, 0)$, où p est un $\mathcal{H}_1$-potentiel quelconque sur X, on voit que $\mu_x^{C^\omega} = \epsilon_x^{1,C^\omega}$. Pour etablir l'égalité $\lambda_x^{C^\omega}$, il suffit d'utiliser le lemme précédent en observant que pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$, la fonction $\widehat{P}_2^E$ n'est autre que la balayée de q sur E dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_2)$.

Remarque. Plus généralement, si μ et λ sont deux mesures de Radon ≥ 0 sur X et si $E \subset X$, les mesures μ^E et λ^E ne sont autre que les balayées des mesures

μ et λ relativement aux espaces harmoniques associés $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$. Si ces espaces sont égaux, on a $\mu^E = \lambda^E$ dès que $\mu = \lambda$.

Il est bien connu que pour tout ouvert fin ω de X, les mesures ϵ_x^{1,C^ω} et ϵ_x^{2,C^ω} sont portées par $\partial_f \omega$ (voir [14]). Donc, d'après la proposition précédente, les mesures $\mu_x^{C^\omega}$ et $\lambda_x^{C^\omega}$, $x \in \omega$, sont portées par $\partial_f \omega$.

Définition 2.2.3. Soit ω un ouvert fin relativement compact de X, le triplet de mesures $(\mu_x^{C^\omega}, \nu_x^{C^\omega}, \lambda_x^{C^\omega})$ est appelé le triplet des mesures biharmoniques au point x de ω.

On va maintenant appliquer les théorèmes 1.4.3 et 1.4.4 du chapitre précédent pour le calcul du couple balayé sur une partie A de X d'un couple $\Phi = (u, v) \in \mathcal{U}^+(X)$ au moyen du balayage relativement aux espaces harmoniques $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$.

Dans la suite, si s et t sont deux fonctions $\mathcal{H}_1$-surharmoniques telles que $s \prec t$, on note $t - s$ la fonction u $\mathcal{H}_1$-surharmonique telle que $t = u + s$.

Proposition 2.2.4. Pour tout couple $\mathcal{H}$-surharmonique (s, t) dans X et toute partie A de X, on a

$$\widehat{(s,t)}^A = (\widehat{R}^A_{\widehat{s - \mathcal{V}(^2 R_t^A)}} + \mathcal{V}(^2 \widehat{R}_t^A), ^2 \widehat{R}_t^A)$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'on a

$$\widehat{(s,t)}^A = (\widehat{\inf}\{u, \ u \geq s \ \text{sur} A, \ (u, ^2 \widehat{R}_t^A) \in \mathcal{U}^+(X)\}, ^2 \widehat{R}_t^A).$$

Or, pour tout couple $(u, ^2 \widehat{R}_t^A) \in \mathcal{U}^+(X)$, on a d'après le théorème 2.2.4,

$$u = \mathcal{V}(^2 \widehat{R}_t^A) + r$$

où r est une fonction $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique ≥ 0. D'autre part, puisqu'on a $(s, ^2 \widehat{R}_t^A) \in \mathcal{U}^+(X)$, on a d'après le théorème 2.2.4,

$$s = \mathcal{V}(^2 \widehat{R}_t^A) + k,$$

où k est une fonction $\mathcal{H}_1$-surharmonique ≥ 0 dans X. On en déduit que

$$\widehat{(s,t)}^A = (\mathcal{V}({}^2\widehat{R}_t^A) +{}^1 \widehat{R}_k^A, {}^2 \widehat{R}_t^A).$$

d'où le résultat.

Corollaire 1. En présence de l'axiome (D) dans chacun des espaces harmoniques $(X,\mathcal{H}_1)$ et $(X,\mathcal{H}_2)$, on a pour tout couple $\mathcal{H}$-surharmonique (s,t) dans X et toute les parties A et B de X telles que $A \subset B$,

$$(\widehat{(\widehat{s,t})^A})^B = \widehat{(s,t)}^A.$$

Démonstration. On a, d'après la proposition 2.2.5,

$$\widehat{(s,t)}^A = ({}^1\widehat{R}^A_{s-\mathcal{V}({}^2\widehat{R}_t^A)} + \mathcal{V}({}^2\widehat{R}_t^A), {}^2 \widehat{R}_t^A).$$

En utilisant les relations ${}^1\widehat{R}^B_{{}^1\widehat{R}^a_u} ={}^1 \widehat{R}^A_u$ et ${}^2\widehat{R}^B_{{}^2\widehat{R}^A_v} ={}^2 \widehat{R}^A_v$ pour u $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique ≥ 0 et v $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 qui découlent aussi du théorème 9.1.1 et du corollaire 9.2.3 de [9], on obtient:

$$(\widehat{(\widehat{s,t})^A})^B = \widehat{(s,t)}^A.$$

Corollaire 2. Soit U un ouvert fin de X et $x \in U$. En présence de l'axiome (D) dans chacun des espaces harmoniques $(X,\mathcal{H}_1)$ et $(X,\mathcal{H}_2)$, la mesure $\nu_x^{C^U}$ est portée par la base $b(C^U)$.

Démonstration. D'après chap. 2, 1.3.7 on a pour tout $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p,q)$ dans X et tout $x \in U$,

$$\widehat{P}_1^{C^U}(x) = \int^* p d\mu_x^{C^U} + \int^* q d\nu_x^{C^U}.$$

Comme $\widehat{\widehat{P^{C^U}}}^{C^U} = \widehat{P^{C^U}}$, on a aussi, toujours d'après le Chap.2, 1.3.7 ,

$$\widehat{P_1}^{C^U} = \int^* \widehat{P_1}^{C^U} d\mu_x^{C^U} + \int^* \widehat{P_2}^{C^U} d\nu_x^{C^U}.$$

Comme $\widehat{P_2}^{C^U} =^2 \widehat{R}_q^{C^U}$ en vertu du corollaire précédent, on en déduit que

$$\int (q -^2 \widehat{R_q}^{C^U}) d\nu_x^{C^U} = 0.$$

Soit

$$\int^* q d\nu_x^{C^U} = \int^{*2} \widehat{R_q}^{C^U} d\nu_x^{C^U},$$

pour tout $q \in P_2'(X)$. D'où , d'après le lemme 2.2.1,

$$\int^* q d\nu_x^{C^U} = \int^{*2} \widehat{R_q}^{C^U} d\nu_x^{C^U}$$

pour tout $\mathcal{H}_2$-potentiel q. En prenant q strict, ceci montre que $\nu_x^{C^U}$ est portée par $b(C^U)$, grâce à [9, proposition 7.2.2].

Comme $b(C^U) \subset \partial_f U$, on déduit du corollaire précédent que pour tout $x \in U$ la mesure $\nu_x^{C^U}$ est portée par $\partial_f U$.

Proposition 2.2.5. Pour tout $x \in U$, la mesure $\nu_x^{C^U}$ ne charge pas les ensembles $\mathcal{H}$-polaires.

Démonstration. Soit $x \in U$. Comme la mesure $\nu_x^{C^U}$ est portée par $\partial_f U$, il suffit de montrer que $\nu_x^{C^U}$ ne charge pas les ensembles $\mathcal{H}$-polaires contenus dans $\partial_f U$. Soit A un ensemble $\mathcal{H}$-polaire $\subset \partial_f U$, on peut trouver un $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$ dans X tel que $p = q = +\infty$ sur A et $p(x) < +\infty$. On a alors $\int q d\nu_x^{C^U} \leq p(x) < +\infty$, d'où $\nu_x^{C^U}(A) \leq \nu_x^{C^U}(\{q = +\infty\}) = 0$.

2.3- Couples finement hyperharmoniques et couples finement biharmoniques.

On désigne par $f - lim$ et $f - liminf$ respectivement les limites fine et fine inférieure, c'est-à-dire au sens de la topologie fine. Pour un couple $F = (u, v)$ de fonctions sur U, on note $f - \liminf_{x \to y} F(x)$ le couple définit par $(f - \liminf_{x \to y} u(x), f - \liminf_{x \to y} v(x))$.

On rappelle d'abord qu'une fonction u sur un ouvert fin U de X est dite $\mathcal{H}_j$-finement hyperharmonique dans U, $j = 1, 2$, si u est finement s.c.i, à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$, et si la topologie fine induite sur U admet une base B formée d'ouverts fins ω tels que, pour tout ouvert $\omega \in B$ on ait $\widetilde{\omega} \subset U$ et

$$u(x) \geq \int^* ud\epsilon_x^{j,C\omega}$$

pour tout $x \in \omega$.

Par analogie avec cette définition on pose la:

Définition 2.3.1. Un couple (u,v) de fonctions sur un ouvert fin U de X est dit finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U si u et v sont finement s.c.i à valeurs dans $]-\infty,+\infty]$, et si on peut trouver une base B d'ouverts de la topologie fine dans U telle que pour tout $\omega \in B$ on ait $\widetilde{\omega} \subset U$ et

$$u(x) \geq \int^* ud\mu_x^{C\omega} + \int^* vd\nu_x^{C\omega} \quad , \quad v(x) \geq \int^* vd\lambda_x^{C\omega}.$$

pour tout $x \in \omega$.

Ces inégalités sont appelées inégalités de la moyenne.

La définition a bien un sens puisque, pour tout $x \in \omega$, les mesures $\mu_x^{C\omega}$, $\nu_x^{C\omega}$ et $\lambda_x^{C\omega}$ sont portées par $\partial_f \omega$ et ne chargent pas les polaires.

On note $\mathcal{U}_f(U)$ l'ensemble des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques dans un ouvert fin U de X, et $\mathcal{U}_f^+(U)$ celui des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U.

Un couple (u,v) de fonctions sur un ouvert fin U de X est dit finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U si le couple $(-u,-v)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U.

Définition 2.3.2. Un couple (u,v) de fonctions sur un ouvert fin de X à valeurs dans R est dit finement $\mathcal{H}$-harmonique (ou simplement finement biharmonique) dans U si (u,v) est à la fois finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique et finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique.

On dit qu'un $\mathcal{H}$-potentiel $P = (p, q)$ dans X est semi-borné si les potentiels p et q sont semi-bornés. Le théorème suivant se démontre exactement comme le théorème 9.4 de [14].

Théorème 2.3.3. Soit (f, g) un couple de fonctions finement s.c.i sur $\widetilde{U}$ et finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U. Si de plus il existe un potentiel semi-borné $P = (p_1, p_2)$ dans X tel que $(f, g) \geq -P$, alors on a l'inégalité $(f(x), g(x)) \geq (\int^* f d\mu_x^{C^U} + \int^* g d\nu_x^{C^U}, \int^* g d\lambda_x^{C^U})$, pour tout $x \in U$ où P est fini.

Démonstration. Il suffit d'adapter aux couples la démonstration du théorème 9.4 de [14].

Corollaire 1. Un couple (u, v) de fonctions sur un ouvert fin U de X est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U si et seulement si u et v sont finement s.c.i $> -\infty$, et si pour tout ouvert fin relativement compact ω tel que $\widetilde{\omega} \subset U$, sur lequel u et v soient bornées inférieurement, et tout $x \in \omega$, on a

$$u(x) \geq \int^* u d\mu_x^{C^\omega} + \int^* v d\nu_x^{C^\omega} \quad , \quad v(x) \geq \int^* v d\lambda_x^{C^\omega}.$$

Corollaire 2. Un couple (u, v) de fonctions finement continues sur U à valeurs dans R est finement harmonique dans U si et seulement si pour tout ouvert fin relativement compact ω tel que $\widetilde{\omega} \subset U$, sur lequel u et v soient bornées, et tout $x \in \omega$, on a

$$u(x) = \int u d\mu_x^{C^\omega} + \int v d\nu_x^{C^\omega} \quad , \quad v(x) = \int v d\lambda_x^{C^\omega}.$$

On en deduit aussi du théorème 2.3.3 les propriétés suivantes des couples finement hyperharmoniques:

1. L'ensemble $\mathcal{U}_f(U)$ est un cône convexe de sommet 0:
   i) $\forall u, v \in \mathcal{U}_f(U),\ u + v \in \mathcal{U}_f(U)$.
   ii) $\forall u \in \mathcal{U}_f(U), \forall \lambda \geq 0$ fini, $\lambda u \in \mathcal{U}_f(U)$.
   iii) De plus, le cône $\mathcal{U}_f(U)$ est inf-stable, c'est-à-dire,

   $$\forall F, G \in \mathcal{U}_f(U),\ min(F, G) \in \mathcal{U}_f(U).$$

   $\mathcal{U}_f^+(U)$ a les mêmes propriétés.

2. Si U_1 et U_2 sont des ouverts fins de X tels que $U_1 \subset U_2$ et si $F = (u, v) \in \mathcal{U}_f(U_2)$, alors $F_{|U_1} = (u_{|U_1}, v_{|U_1}) \in \mathcal{U}_f(U_1)$.

3. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts fins de X et si F est un couple de fonctions sur $U = \cup_{i\in I} U_i$ tel que $F|U_i \in \mathcal{U}_f(U_i)$ pour tout $i \in I$, alors $F \in \mathcal{U}_f(U)$.

Ces propriétés de faisceau en topologie fine, vraies aussi pour les couples finement biharmoniques permettent, quitte à se restreindre aux composantes finement connexes de l'ouvert fin U, de se ramener au cas où U est un domaine fin que l'on fixera dans la suite. On rappelle que la topologie fine est localement connexe (voir [12], corollaire du Théorème 9.11). Quitte à ajouter à U l'ensemble polaire des points irréguliers de sa frontière fine, on le supposera, grâce au principe de prolonpar continuité fine, régulier (donc un K_σ de X).

Lemme 2.3.4 Soit (h, k) un couple $\mathcal{H}$-biharmonique ≥ 0 dans X et ω un ouvert fin relativement compact de X. Alors on a

$$h(x) = \int h d\mu_x^{C\omega} + \int k d\nu_x^{C\omega} \quad \text{et} \quad k(x) = \int k d\lambda_x^{C\omega},$$

pour tout $x \in \omega$.

Démonstration. D'après la proposition 2.2.5, on a

$$\widehat{(h,k)}^{C\omega} = ({}^1\widehat{R}_{h-\mathcal{V}({}^2\widehat{R}_k^{C\omega})} + \mathcal{V}({}^2\widehat{R}_k^{C\omega}), {}^2\widehat{R}_k^{C\omega}).$$

Or les fonctions $h-\mathcal{V}(k)$ et k sont respectivement $\mathcal{H}_1$-harmonique et $\mathcal{H}_2$-harmonique dans X, donc ${}^2\widehat{R}_k^{C\omega} = k$ et ${}^1\widehat{R}_{h-\mathcal{V}({}^2\widehat{R}_k^{C\omega})} = h - \mathcal{V}(k)$, d'où $\widehat{(h,k)}^{C\omega} = (h, k)$ et le lemme découle alors du théorème 1.4.3 et de la proposition 2.2.3.

Corollaire. Soit (h, k) un couple $\mathcal{H}$-biharmonique dans un ouvert Ω de X pour la topologie initiale, alors (h, k) est finement $\mathcal{H}$-biharmonique dans Ω.

Théorème 2.3.5. Soient U un ouvert de X et (u, v) un couple $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U. Alors (u, v) est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U.

Démonstration. Les fonctions u et v sont s.c.i, donc finement s.c.i dans U. Ces fonctions sont aussi localement bornées inférieurement. Quitte à se placer localement on peut donc supposer qu'il existe un couple biharmonique $(h, k) > 0$

dans U tel que $(u, v) + (h, k) \geq 0$. Soit ω un ouvert fin tel que $\tilde{\omega} \subset U$ et sur lequel u et v sont bornées inférieurement et soit $x \in \omega$, alors on a

$$\begin{aligned} u(x) + h(x) &= \int^* (u+h) d\epsilon_x \\ &\geq \int^* (u+h) d\mu_x^{C\omega} + \int^* (v+k) d\nu_x^{C\omega}. \end{aligned}$$

Or on a d'après le lemme précédent

$$h(x) = \int h d\mu_x^{C\omega} + \int k d\nu_x^{C\omega} \quad et \quad k(x) = \int k d\lambda_x^{C\omega}$$

d'où

$$u(x) \geq \int^* u d\mu_x^{C\omega} + \int^* v d\nu_x^{C\omega}.$$

On en deduit que le couple (u, v) est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans X.

Les quatres propositions qui suivent résultent immédiatement de la définition 2.3.1 et de celle des fonctions finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques.

Proposition 2.3.6. Soit (u_n, v_n) une suite croissante d'éléments de $\mathcal{U}_f(U)$. On a alors $(\sup_n u_n, \sup_n v_n) \in \mathcal{U}_f(U)$.

Proposition 2.3.7. Soit $(u, v) \in \mathcal{U}_f(U)$, et soit $v^{'}$ une fonction finement hyperharmonique dans U. Si $v^{'} \leq v$, alors $(u, v^{'}) \in \mathcal{U}_f(U)$.

Proposition 2.3.8. Soient u et v deux fonctions finement hyperharmoniques ≥ 0. On a alors $(u, 0) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, et $(+\infty, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$.

Proposition 2.3.9. Soit $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$; alors les fonctions u et v sont finement hyperharmoniques dans U. En particulier le couple $(u, 0) \in \mathcal{U}_f^+(U)$.

Corollaire. Pour tout couple $(u, v) \in \mathcal{U}_f(U)$, les fonctions u et v sont finement continues dans U.

Démonstration. Quitte à se placer localement et ajouter à (u, v) un couple biharmonique $(h, k) > 0$, on peut supposer $(u, v) \geq 0$. D'après la proposition précédente, les fonctions u et v sont respectivement finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique et $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique, donc finement continues.

Proposition 2.3.10. Soient V un ouvert fin de U et $(u_1, v_1) \in \mathcal{U}_f(U)$, et $(u_2, v_2) \in \mathcal{U}_f(U)$ tels que

$$f - \liminf_{x \to y} (u_2, v_2)(x) \geq (u_1(y), v_1(y)), \ \forall y \in \partial_f V \cap U,$$

alors, le couple (u, v) défini par

$$(u,v)(x) = \begin{cases} \min((u_1, v_1), (u_2, v_2))(x) & si \ \ x \in V \\ (u_1, v_1)(x) & si \ \ x \in U \setminus V \end{cases}.$$

est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U.

Démonstration. On adapte aux couples la démonstration du lemme 10.1 de [14].

Soit $S_2^{'}(U)$ le cône des fonctions finement $\mathcal{H}_2$-surharmoniques positives majorées par un élément de $P_2^{'}(X)$.

Lemme 2.3.11. Tout $v \in \mathcal{S}_2^{'}(U)$, est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante $p_n -^2 \widehat{\mathcal{R}}_{p_n}^{C^U}$, où (p_n) est une suite d'éléments de $P_2^{'}(X)$.

Démonstration. Le lemme résulte immédiatement du théorème 3 de [16].

Lemme 2.3.12. Toute fonction v finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans U est l'enveloppe supérieure d'une suite d'élements de $\mathcal{S}_2^{'}(U)$.

Proposition 2.3.13. Pour toute fonction v finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans U et tout ouvert fin $\omega \subset \tilde{\omega}$, le couple $(\int^* v d\nu_.^{C^\omega}, \int^* v d\lambda_.^{C^\omega})$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans ω.

Démonstration. D'après les lemmes précédents, il suffit de démontrer la proposition, lorsque v est de la forme $(q -^2 \widehat{R}_q^{C^U})$ où q est un élément de $P_2^{'}(X)$. Soit $q \in P_2^{'}(X)$ et p un $\mathcal{H}_1$-potentiel fini continu tel que $P = (p, q)$ soit un $\mathcal{H}$-potentiel fini continue dans X. On a

$$(\widehat{P}_1^{C^U}, \widehat{P}_2^{C^U})^{C^\omega} = (\int^* \widehat{P}_1^{C^U} d\mu_x^{C^\omega} + \int^* \widehat{P}_2^{C^U} d\nu_x^{C^\omega}, \int^* \widehat{P}_2^{C^U} d\lambda_x^{C^\omega}).$$

Pour compléter la preuve, il suffit d'utiliser les identités $(\widehat{P}_1^{C^U}, \widehat{P}_2^{C^U})^{C^\omega} = (\widehat{P}_1^{C^\omega}, \widehat{P}_2^{C^\omega})$ et $\widehat{P}_2^{C^U} = {}^2\widehat{R}_q^{C^U}$, et le fait que ${}^2\widehat{R}_q^{C^U}$ est finement $\mathcal{H}_2$-harmonique dans ω.

Corollaire 1. Soient $(u,v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ et ω un ouvert fin régulier tel que $\widetilde{\omega} \subset U$; alors le couple de fonctions

$$(\int^* u d\epsilon_{\cdot}^{1,C^\omega} + \int^* v d\nu_{\cdot}^{C^\omega}, \int^* v d\epsilon_{\cdot}^{2,C^\omega})$$

est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans ω.

Corollaire 2. Soient $(u,v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ et ω un ouvert fin régulier tel que $\widetilde{\omega} \subset U$; alors le couple de fonctions $(u,v)_\omega$ défini par

$$(u,v)_\omega = \begin{cases} (\int^* u d\epsilon_{\cdot}^{1,C^\omega} + \int^* v d\nu_{\cdot}^{C^\omega}, \int^* v d\epsilon_{\cdot}^{2,C^\omega}) & \text{dans } \omega \\ (u,v) & \text{dans } U \setminus \omega. \end{cases}$$

est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U.

Démonstration. Comme le couple (u,v) est ≥ 0, les fonctions u et v sont finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U d'après la proposition 2.3.9. Il résulte alors d'après ([14], th.14.6 et th. 14.7) que l'on a $f - \liminf_{x \to y} (\int^* u d\epsilon_x^{1,C^\omega} + \int^* v d\nu_x^{C^\omega}) \geq u(y)$ et $f - \liminf_{x \to y} \int^* v d\epsilon_x^{C^\omega} \geq v(y)$ pour tout $y \in \partial_f \omega$, d'où le résultat en vertu du corollaire 1 et de la proposition 2.3.10.

2.4. Réduction et balayage des couples finement hyperharmoniques.

Si f une fonction sur U, on note $\widehat{f}$ sa régularisée finement s.c.i. C'est la plus grande minorante de f qui soit finement s.c.i dans U, et elle est donnée par

$$\widehat{f}(x) = f - \liminf_{x \to y} f(y), \quad \forall x \in U.$$

Si $F = (f,g)$ est un couple de fonctions sur U, on note $\widehat{F}$ le couple $(\widehat{f}, \widehat{g})$. Ce couple est appelé le couple régularisé finement s.c.i de F dans U.

Définition 2.4.1. Soit $A \subset U$ et $F = (f,g)$ un couple de fonctions ≥ 0 sur U. Le couple réduit de F sur A, est le couple défini par

$$F^A = \inf\{(u,v) \in \mathcal{U}_f^+(U); (u,v) \geq (f,g) \text{ sur } A\}.$$

Le couple balayé de F sur A est le couple $\widehat{F}^A$ régularisé finement s.c.i de F^A .

Proposition 2.4.2. Soit $A \subset U$ et $F = (f, g)$ un couple de fonctions sur U. Alors le couple $\widehat{F}^A$ est $\mathcal{H}$-finement hyperharmonique dans U.

Pour toute partie A de U, on note ${}^{j,U}\widehat{R}_f^A$, $j = 1, 2$, la balayée sur A d'une fonction f relativement à U dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_j)$.

Proposition 2.4.3. Soient (f, g) un couple de fonctions sur U, et $A \subset U$. Posons $\widehat{F}^A = (\widehat{F}_1^A, \widehat{F}_2^A)$. On note alors $\widehat{(f, 0)}^A = ({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$ et $\widehat{F}_2^A = {}^{2,U}\ \widehat{R}_g^A$.

Démonstration. Le couple $({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$ est $\mathcal{H}$-finement hyperharmonique ≥ 0 dans U et majore $(f, 0)$ q.p sur A, donc $({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$. D'autre part si $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ majore le couple $(f, 0)$ sur A, alors u est une fonction finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique ≥ 0 qui majore f sur A, donc $\widehat{(f, 0)}^A \geq ({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$, et par suite $\widehat{(f, 0)}^A = ({}^{1,U}\widehat{R}_f^A, 0)$. Soit maintenant v une fonction $\mathcal{H}_2$-finement hyperharmonique ≥ 0 sur U telle que $v \geq 0$ sur A. Alors le couple $(+\infty, v)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0 et majore (f, g) sur A, d'où ${}^{2,U}\widehat{R}_g^A \geq \widehat{F}_2^A$; l'inégalité inverse découle facilement du fait que pour tout couple $\mathcal{H}$-finement hyperharmonique $(u, v) \geq 0$ tel que $(u, v) \geq (f, g)$ sur A, la fonction v est $\mathcal{H}_2$-finement hyperharmonique ≥ 0 et majore g sur A.

Proposition 2.4.4. Soient $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ et $A \subset U$. Alors on a l'égalité $\widehat{(u, v)}^A = (u, v)$ q.p sur A.

Démonstration. Cela résulte en effet du fait que pour tout couple finement hyperharmonique $(u, v) \geq 0$, les fonctions u et v sont finement hyperharmoniques positives et de [14], th. 11.8.

Remarque. Si $(u, v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ majore q.p un couple F de fonctions sur $A \subset U$, alors $(u, v) \geq \widehat{F}^A$.

2.5- Ordre spécifique dans $\mathcal{U}_f^+(U)$.

Remarquons d'abord que le cône $\mathcal{U}_f^+(U)$ est réticulé pour l'ordre naturel, ce qui se démontre comme en théorie des fonctions finement harmoniques.

L'ordre spécifique, noté $\prec$, est définit sur $\mathcal{U}_f^+(U)$ par:

$$(u,v) \prec (s,t) \Leftrightarrow \exists (u_1,v_1) \in \mathcal{U}_f^+(U) : (s,t) = (u_1,v_1) + (u,v).$$

Proposition 2.5.1. Soient $F_1 = (u_1,v_1)$, $F_2 = (u_2,v_2) \in \mathcal{U}_f^+(U)$. On a alors $[\widehat{(F_1 - F_2)^+}]^U \prec F_1$.

Démonstration. La proposition se démontre exactement comme dans le cas des fonctions finement hyperharmoniques (voir [14], page 129,130 et 131).

Corollaire. (Propriété de décomposition de Riesz) Soient F, G et H trois couples de $\mathcal{U}_f^+(U)$ tels que $F \leq G + H$. Il existe alors deux couples $F_1, F_2 \in \mathcal{U}_f^+(U)$ tels que $F = F_1 + F_2$, $F_1 \leq G$ et $F_2 \leq H$.

Théorème 2.5.2. Soient $S, T \in \mathcal{U}_f^+(U)$ et $A \subset U$. On a alors:

$$\widehat{(S+T)}^A = \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$$

Démonstration. L'inégalité $\widehat{(S+T)}^A \leq \widehat{S}^A + \widehat{T}^A$ découle immédiatement de la définition du balayage; l'inégalité inverse s'en déduit en lui appliquant le corollaire précédent et en utilisant les proporiétés des couples et des fonctions finement hyperharmoniques.

On déduit aussi de la proposition 2.5.1. que le cône $\mathcal{U}_f^+(U)$ vérifie les axiomes du chapitre 4 de [9] quand U est muni de la topologie fine, d'où le résultat suivant :

Proposition 2.5.3. Le cône $\mathcal{U}_f^+(U)$ est un treillis complétement réticulé pour l'ordre spécifique.

Si $F, G \in \mathcal{U}_f^+(U)$, on note $F \vee G$ et $F \wedge G$ respectivement le max et le min au sens de l'ordre spécifique. Si $\{F_i\ ; i \in I\}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{U}_f^+(U)$, on note $\wedge_i F_i$ l'enveloppe inférieure au sens de l'ordre spécifique de la famille $\{F_i, i \in I\}$.

Remarquons que, comme dans le cas harmonique, on a

$$F \vee G \ + \ F \wedge G \ = \ F + G.$$

et pour une famille filtrante croissante (resp. décroissante), au sens de l'ordre spécifique, $\{F_i; i \in I\}$, d'éléments de $\mathcal{U}_f^+(U)$, on a

$$\vee_i F_i = \sup_i F_i (\text{resp. } \wedge_i F_i = \widehat{\inf}_i F_i).$$

2.6- Couples finement surharmoniques et couples potentiels fins.

Dans ce paragraphe on va se contenter d'énoncer seulement les définitions et quelques propriétés essentielles des couples finement surharmoniques et des couples potentiels fins (dans la suite on dira tout simplement, par abus de langage, potentiels fins).

Définition 2.6.1. Un couple (u, v) finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans un ouvert fin V de X est dit finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans V si les fonctions u et v sont finies sur un ensemble dense dans V.

Il n'est pas difficile de voir que, d'après ([14], th. 12.9.), pour qu'un couple $(u, v) \in \mathcal{U}_f(U)$ soit finement $\mathcal{H}$-surharmonique, il faut et il suffit que les fonctions u et v soient finies en au moins un point de U.

On note $\mathcal{S}_f(U)$ l'ensemble des couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques dans U. Il est clair que cet ensemble est un cône convexe. On note aussi $\mathcal{S}_f^+(U)$ le sous-cône de $S_f(U)$ formé des couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques ≥ 0, et $\mathcal{S}_f^{j,+}(U)$, $j = 1, 2$, le cône des fonctions finement $\mathcal{H}_j$-surharmoniques ≥ 0 dans U.

Définition 2.6.2. Un couple $P = (p_1, p_2) \in \mathcal{S}_f^+(U)$ est appelé un $\mathcal{H}$-potentiel fin si tout couple (u, v) finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U qui le minore au sens de l'ordre naturel produit est ≤ 0.

On note $\mathcal{P}_f(U)$ l'ensemble des $\mathcal{H}$-potentiels fins dans U. Alors $\mathcal{P}_f(U)$ est un sous-cône de $\mathcal{S}_f^+(U)$. C'est aussi une bande de $\mathcal{S}_f^+(U)$, i.e.,

$$\forall P, Q \in S_f^+(U) : P + Q \in P_f(U) \Longrightarrow P, Q \in P_f(U).$$

Proposition 2.6.3. Soit (s_1, s_2) un couple finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans un domaine fin U de X. Alors
(i)- Si $s_2 \geq 0$, la fonction s_1 est finement $\mathcal{H}_1$-surharmonique.
(ii)- Le couple (s_1, s_2) est un potentiel fin si et seulement si, pour tout $j = 1, 2$, s_j est un $\mathcal{H}_j$-potentiel fin.

Démonstration. Le i) résulte aussitôt de la définition 6.1 et de celle des fonctions finement $\mathcal{H}$-surharmoniques. Montrons le ii). Supposons que s_1 et s_2 soient des potentiels fins dans U et que (u, v) soit un couple finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U tel que $(u, v) \leq (s_1, s_2)$. Comme v est finement $\mathcal{H}_2$-hypoharmonique dans U, on a $v \leq 0$, et il résulte alors de la définition des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques que u est finement $\mathcal{H}_1$-hypoharmonique dans U, et donc $u \leq 0$. Inversement, supposons que le couple (s_1, s_2) soit un $\mathcal{H}$-potentiel fin, si u est une fonction finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U, telle que $u \leq s_1$, alors le couple $(u, 0)$ est finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique $\leq (s_1, s_2)$, d'où $(u, 0) \leq 0$, et par suite $u \leq 0$, donc s_1 est un $\mathcal{H}_1$-potentiel fin dans U. De même, si v est une fonction $\mathcal{H}_2$-hypoharmonique dans U telle que $0 \leq v$, alors le couple $(-\infty, v)$ est finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique et on a $(-\infty, v) \leq (s_1, s_2)$, d'où $v = 0$, donc s_2 est un $\mathcal{H}_2$-potentiel fin dans U.

Proposition 2.6.4. (Principe du Maximum) Soient ω un ouvert fin $\subset U$ et $(u, v) \in \mathcal{U}_f(\omega)$ tel que $\liminf_{x \in \omega, x \to y} (u, v)(y) \geq 0$, pour tout $y \in \partial_f \omega \cap U$. S'il existe un $\mathcal{H}$-potentiel fin P dans U tel que $(u, v) \geq -P$ dans ω, alors on a $(u, v) \geq 0$ dans ω.

On signale que la réstriction de l'ordre spécifique dans $\mathcal{U}_f^+(U)$ à $\mathcal{S}_f^+(U)$ fait de ce dernier un treillis complétement réticulé .

Comme en théorie des fonctions finement harmoniques, un couple $H \in \mathcal{S}_f^+(U)$ sera dit $\mathcal{H}$-invariant s'il est orthogonal, pour l'ordre spécifique, á la bande des $\mathcal{H}$-potentiels fins. On note $\mathcal{H}_i(U)$ l'ensemble des couples invariants; $\mathcal{H}_i(U)$ est un sous-cône de $S_f^+(U)$. C'est aussi une bande de $S_f^+(U)$. On a donc,

$$\forall S \in S_f^+(U), \exists! P \in P_f(U), \exists! H \in \mathcal{H}_i(U) : S = P + H.$$

Il est clair que $\mathcal{H}_i(U)$ est un cône convexe. il est clair aussi que tout couple finement biharmonique est invariant, mais la réciproque est fausse en gènèral. En effet soit h une fonction invariante dans U qui ne soit pas finement $\mathcal{H}_1$-harmonique; alors le couple $(h, 0)$ est invariant, mais il n'est pas finement $\mathcal{H}$-harmonique.

Question. Le problème de savoir si une fonction invariante dans U est la somme d'une suite de fonctions finement harmoniques positives dans U a été posé par Fuglede dans [19]. A notre connaissance ce problème n'est pas encore résolu on peut poser la question suivante:
Est-ce-que tout couple invariant dans U est la somme d'une suite de couples finement $\mathcal{H}$-harmoniques ≥ 0?

Même si la réponse au problème de Fuglede est positive, il semble qu'il n'est pas evident qu'il en soit de même pour les couples $\mathcal{H}$-invariants. En effet, comme on va le voir dans la suite, si $H = (h, k)$ est un couple $\mathcal{H}$-invariant, on a $h = h_1 + \mathcal{V}(k)$, où $\mathcal{V}$ est un noyau borélien sur U, et h_1 est invariante. On voit donc que, même si h_1 et k sont des sommes de suites de fonctions finement $\mathcal{H}_1$-harmoniques ≥ 0 et $\mathcal{H}_2$-harmoniques ≥ 0 respectivement, il ne semble pas facile d'affirmer que le couple $(\mathcal{V}(k), k)$ est la somme d'une suite de couples finement harmoniques dans U.

2.7- Couples finement hyperharmoniques purs.

Proposition 2.7.1. Soit v une fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans un ouvert fin V de X. Alors

$$u_v = \widehat{\inf}\{u \geq 0;\ (u, v) \in \mathcal{U}_f^+(V)\}$$

est finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique dans V et l'on a $(u_v, v) \in \mathcal{U}_f^+(V)$.

Comme en théorie des fonctions biharmoniques, nous adaptons la définition suivante:

Définition 2.7.2. La fonction u_v de la proposition précédente est appelée la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 asociée à v.

Soit (u, v) un couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0 dans U. On dit que ce couple est pur si u est la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

On notera dans la suite $\mathcal{V}_0(v)$ la fonction finement hyperharmoniquepure d'ordre 2associée à $v \geq 0$ dans U. Cette notation sera justifiée par la suite.

Proposition 2.7.3. Soit $(u, v) \in S_f^+(U)$ un couple pur. Si la fonction v est finement $\mathcal{H}_2$-harmonique dans un ouvert fin $V \subset U$, et si u est finie dans V, alors le couple (u, v) est finement biharmonique dans V.

Démonstration. Soit ω un ouvert fin relativement compact régulier tel que $\widetilde{\omega} \subset V$; alors le couple $(u, v)_\omega$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U d'après le corollaire 2 de la proposition 2.3.13, et l'on a

$$(u, v)_\omega = (\int u d\mu_.^{C^\omega} + \int v d\nu_.^{C^\omega}, v)$$

dans ω, d'où $u \leq \int u d\mu_.^{C^\omega} + \int v d\nu_.^{C^\omega}$ dans ω. Comme le couple (u, v) est finement continu, on en déduit qu'il est finement harmonique dans V.

Proposition 2.7.4. Soient v_1 , v_2 deux fonctions finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U. Alors, si $v_1 \leq v_2$, on a $\mathcal{V}_0(v_1) \leq \mathcal{V}_0(v_2)$.

Démonstration. La proposition résulte immédiatement de la définition 2.7.2 et de la proposition 2.3.7.

Proposition 2.7.5. Soit $(s_1, s_2) \in S_f^+(U)$. On a alors $\mathcal{V}_0(s_2) \prec s_1$, i.e il existe $t \in S_f^{1,+}(U)$ tel que $\mathcal{V}_0(s_2) + t = s_1$.

Démonstration. Posons $s = \mathcal{V}_0(s_2)$. Soit ω un ouvert fin relativement compact régulier tel que $\overline{\omega} \subset U$ et soient $v \in -S_f^{1,+}(\omega)$, bornée supérieurement et $u \in S_f^{1,+}(\omega))$, bornée inférieurement, telles que $f - \limsup_{x \to y} v(x) \leq s_1(y)$ (resp. $f - \liminf_{\{x \to y, x \in \omega\}} u(x) \geq s(y)$). Considérons la fonction

$$t = \begin{cases} \inf(s_1 + u - v, s_1) & \text{dans } \omega \\ s_1 & \text{dans } U \setminus \omega. \end{cases}$$

Alors, d'après les conditions ci-dessus sur u et v et la proposition 2.3.10, le couple (t, s_2) est finement surharmonique dans U. On en déduit $s_1 + u - v \geq s_2$

dans ω. Les fonctions u et v étant arbitraires, on en déduit donc d'après ([14], th. 14.6) que, pour tout $x \in \omega$, tel que $s(x) > +\infty$, on a

$$s_1(x) - s(x) \geq \int (s_1 - s) d\epsilon_x^{C\omega}.$$

Le théorème de prolongement par continuité fine ([14], th. 9.14) nous assure alors que la fonction $s_1 - s$ se prolonge en une fonction finement $\mathcal{H}_1$-surharmonique $t \geq 0$ dans U et l'on a donc $s_1 = s + t$.

Proposition 2.7.6. Soient v_1, v_2 deux fonctions finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U. On a alors,

$$\mathcal{V}_0(v_1 + v_2) = \mathcal{V}_0(v_1) + \mathcal{V}_0(v_2).$$

Démonstration. L'inégalité $\mathcal{V}_0(v_1 + v_2) \leq \mathcal{V}_0(v_1) + \mathcal{V}_0(v_2)$ découle simplement de la définition 2.7.1 et du faite que le couple $(\mathcal{V}_0(v_1) + \mathcal{V}_0(v_2), v_1 + v_2) = (\mathcal{V}_0(v_1), v_1) + (\mathcal{V}_0(v_2), v_2)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0 dans U. Montrons l'inégalité inverse. Le résultat est trivial si $\mathcal{V}_0(v_1) \equiv +\infty$ ou $\mathcal{V}_0(v_2) \equiv +\infty$. Supposons donc que les fonctions $\mathcal{V}_0(v_1)$ et $\mathcal{V}_0(v_2)$ soient finement $\mathcal{H}_1$-surharmoniques (on rappelle que l'ouvert fin est supposé finement connexe). Alors, d'après la propriété de décomposition de Riesz des couples finement $\mathcal{H}$-surharmonique ≥ 0 appliquée à l'inégalité $(\mathcal{V}_0(v_1 + v_2), v_1 + v_2) \leq (\mathcal{V}_0(v_1), v_1) + (\mathcal{V}_0(v_2), v_2)$, on peut trouver deux couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques dans U, $(s_1, t_1) \geq (0, 0)$ et $(s_2, t_2) \geq (0, 0)$, tels que $(\mathcal{V}_0(v_1 + v_2), v_1 + v_2) = (s_1, t_1) + (s_2, t_2)$ et $(s_1, t_1) \leq (\mathcal{V}_0(v_1), v_1)$ et $(s_2, t_2) \leq (\mathcal{V}_0(v_2), v_2)$, ce qui entraine $t_1 = v_1$ et $t_2 = v_2$ et donc $s_1 = \mathcal{V}_0(v_1)$ et $s_2 = \mathcal{V}_0(v_2)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Proposition 2.7.7. Soient (v_n) une suite croissante de fonctions finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmoniques ≥ 0 dans U, et soit $v = \sup_n v_n$. On a l'égalité suivante: $\mathcal{V}_0(v) = \sup\limits_n \mathcal{V}_0(v_n)$.

Démonstration. On a $(\mathcal{V}_0(v), v) \in \mathcal{U}_f^+(U)$, et $v \geq v_n$, donc le couple $(\mathcal{V}_0(v), v_n)$ appartient à $\mathcal{U}_f^+(U)$ pour tout n d'après la proposition 2.7.4, donc $\mathcal{V}_0(v) \geq \mathcal{V}_0(v_n)$ pour tout n, et par suite $\mathcal{V}_0(v) \geq \sup_n \mathcal{V}_0(v_n)$. D'autre part, on a pour tout n $(\sup_n \mathcal{V}_0(v_n), \sup\limits_n v_n) \in \mathcal{U}_f^+$, d'après la proposition 2.3.6, donc $(\sup_n \mathcal{V}_0(v_n), v) \in \mathcal{U}_f^+$, d'où $\mathcal{V}_0(v) \leq \sup_n \mathcal{V}_0(v_n)$.

Pour toute fonction $\mathcal{H}_1$-surharmonique $s \geq 0$ sur X, la fonction $s -^1 \widehat{R}_s^{C^U}$, est bien définie et finement surharmonique dans le complémentaire dans U d'un ensemble $\mathcal{H}_1$-polaire. Elle se prolonge donc, en vertu du principe du prolongement par continuité fine en une fonction notée s_U, de $S_f^+(U)$.
Soit $\mathcal{V}_U$ le noyau borélien sur U défini par

$$\mathcal{V}_U f = \mathcal{V}(\overline{f}) - {}^1\widehat{R}_{\mathcal{V}(\overline{f})}|U$$

pour toute fonction borélienne sur U, où $\overline{f}$ est le prolongement de f à X, nul dans C^U, et $\mathcal{V}$ est le noyau du théorème 1.4.3. On remarquera que si $U = X$, alors $\mathcal{V}_U = \mathcal{V}$.

Si ω est un ouvert fin de U, on notera $\mathcal{V}_\omega$ le noyau égale à $\mathcal{V}_\delta$ dans chaque composante finement connexe δ de ω.

On note $\mathcal{S}_j^+(X)$, $j = 1, 2$, le cône des fonctions $\mathcal{H}_j$-surharmoniques ≥ 0.
Posons

$$\mathcal{V}(X) = \{t \in \mathcal{S}_2^+(X) : \mathcal{V}(t) \in \mathcal{S}_1^+(X)\}.$$

Remarquons que si $t \in \mathcal{V}(X)$, alors $\mathcal{V}(t)_U = \mathcal{V}_U(t_{|U})$.

Proposition 2.7.8. Soit $t \in \mathcal{V}(X)$. Alors la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à la restriction de t à U est égale à $\mathcal{V}(t)_{|U}$.

Démonstration. Soit q_0 un $\mathcal{H}_2$-potentiel > 0 tel que $\mathcal{V}(q_0) > +\infty$. On a $(\mathcal{V}(t))_U = \sup_n(\mathcal{V}(t \wedge nq_0)_U)$. D'après la proposition 2.7.7, il suffit de montrer que la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à $(t \wedge nq_0)_{|U}$ est égale à $\mathcal{V}(t \wedge nq_0)_{|U}$, ce qui permet de se ramener au cas où $\mathcal{V}(t)_{|U}$ est finie. Le couple $(\mathcal{V}(t)_U, t)$ est $\mathcal{H}$-finement hyperharmonique ≥ 0 dans U. En effet, on a, pour tout ouvert fin $\delta \subset \overline{\delta} \subset U$ et tout $x \in \delta$,

$$\begin{aligned} \int (\mathcal{V}(t))_U d\mu_x^{C\delta} + \int t d\nu_x^{C\delta} &\leq \mathcal{V}(t) - \int {}^1\widehat{R}_{\mathcal{V}(t)}^{C^U}|_U d\mu_x^{C^\delta} \\ &= (\mathcal{V}(t) -^1 \widehat{R}_{\mathcal{V}(t)}^{C^U})(x), \end{aligned}$$

car le couple $(\mathcal{V}(t), t)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique dans U et la fonction ${}^1\widehat{R}_{\mathcal{V}(t)}^{C^U}$ est finement $\mathcal{H}_1$-harmonique dans U d'après [14], Th. 10.2. Soit u une fonction finement $\mathcal{H}_1$-surharmonique ≥ 0 dans U telle que le couple (u,t) soit finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans U, et soit u_1 la fonction définie par

$$u_1 = \begin{cases} \min(u +^1 \widehat{R}^{C^U}_{\mathcal{V}(t)}, \mathcal{V}(t)) & \text{dans } U. \\ \mathcal{V}(t) & \text{dans } X \setminus U. \end{cases}$$

Alors, d'après le théorème 3.10, le couple (u_1,t) est finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans X. Or, comme $t \geq 0$, la fonction u_1 est $\mathcal{H}_1$-surharmonique dans X, donc elle est $\mathcal{H}_1$-surharmonique dans X en vertu du théorème 9.8 de [14]. Il en résulte, d'après la définition des couples finement $\mathcal{H}$-surharmoniques que (u_1,t) est surharmonique dans X, d'où $u +^1 \widehat{R}^{C^U}_{\mathcal{V}(t)} \geq (t)$ d'où le résultat.

Lemme 2.7.9. Pour toute fonction $s \in \mathcal{S}^{1,+}_f(U)$ majorée par un élément de $\mathcal{V}(X)$, il existe une suite croissante (t_n) de fonctions de $\mathcal{V}(X)$ telle que $s = \sup_n (t_n)_{|U}$.

Démonstration. Le lemme résulte aussitôt du théorème 3 de [16].

Théorème 2.7.10. Pour toute fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique $v \geq 0$ dans U, $\mathcal{V}_U(v)$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v.

Démonstration. Soit $s \in \mathcal{V}(X)$. On a alors

$$s|_U = s_U +^2 \widehat{R}^{C^U}_s|_U,$$

d'où d'après la proposition 2.7.6,

$$\mathcal{V}_0(s|_U) = \mathcal{V}_0(s_U) + \mathcal{V}_0(^2\widehat{R}^{C^U}_s|_U),$$

et, par suite, d'après la proposition 2.7.8,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0(s_U) &= \mathcal{V}_0(s|_U) - \mathcal{V}_0(^2\widehat{R}^{C^U}_s|_U) && (1) \\ &= \mathcal{V}(s)_U - \mathcal{V}(^2\widehat{R}^{C^U}_s)_U. && (2) \end{aligned}$$

q.p. dans U. D'autre part, un calcul facile donne

$$\mathcal{V}(s)_U - \mathcal{V}(^2\widehat{R}^{C^U}_s)_U = \mathcal{V}_U(s_U) q.p.$$

d'où $\mathcal{V}_0(t_U) = \mathcal{V}_U(t_U)$. En vertu de la proposition 2.7.7, le théorème découle maintenant du lemme 2.7.9 et du fait que tout élément de $\mathcal{U}^{2,+}_f(U)$ est l'enveloppe supérieure d'une suite croissante de fonctions de $\mathcal{S}_f^{2,+}(U)$ majorées par des éléments de $\mathcal{V}(X)$.

Remarque. Si v est une fonction finement $\mathcal{H}_2$-hyperharmonique ≥ 0 dans un ouvert fin ω de U, alors la fonction finement hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à v est égale à $\mathcal{V}^\omega(v)$.

Le théorème suivant est une application du précédent:

Théorème 2.7.11. Si (u, v) est un couple finement surharmonique localement borné inférieurement dans X, alors (u, v) est un couple surharmonique dans X.

Démonstration. Quitte à se placer localement, on peut supposer que $(u, v) \geq 0$ dans X. Alors la fonction v est finement $\mathcal{H}_2$-surharmonique ≥ 0, donc $\mathcal{H}_2$-surharmonique dans X d'après le théorème 9.8 de [14]. D'autre part on a, d'après ce qui précéde, $u = \mathcal{V}(v) + t$, où t est une fonction finement surharmonique ≥ 0, donc surharmonique dans X toujours d'après [14], th. 9.8. Maintenant le théorème résulte du fait que, dans le cas où $U = X$ le noyau $\mathcal{V}_U$ coincide avec le noyau $\mathcal{V}$ du paragraphe 2.

Proposition 2.7.12. Soit $(u, v) \in \mathcal{S}_f^+(U)$ un couple pur. Si v est un $\mathcal{H}_2$-potentiel fin, alors (u, v) est un $\mathcal{H}$-potentiel fin.

Démonstration. Soit (h, k) un couple finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique dans U tel que $0 \leq (h, k) \leq (u, v)$. Alors k est finement $\mathcal{H}_2$-hypoharmonique ≥ 0 et minore v, donc $k = 0$. On en deduit que h est $\mathcal{H}_1$-hypoharmonique, donc le couple $(u-h, v)$ est finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique ≥ 0, donc $u-h \geq u$, et par suite $h = 0$.

Maintenant on peut donner également quelques applications de la proposition 7.12. aux couples invariants.

Proposition 2.7.13. Si (h, k) est un couple invariant dans U, alors k est une fonction $\mathcal{H}_2$-invariante dans U.

Démonstration. En effet, si p est un $\mathcal{H}_2$-potentiel fin qui minore spécifiquement

k, alors le couple (h, p) est finement $\mathcal{H}$-surharmonique dans U et donc le couple $(V_0(p), p)$ est d'après la proposition précédente, un $\mathcal{H}$-potentiel fin qui minore spécifiquement (h, k) d'après la proposition 2.7.5, donc il est nul.

Comme en théorie des fonctions harmoniques, nous avons la

Proposition 2.7.14. Soit $H = (h, k)$ un couple invariant dans U, alors H est finement $\mathcal{H}$-harmonique dans le domaine fin $\omega = \{x \in U;\ h(x) + k(x) < +\infty\}$.

Démonstration. En effet, comme la fonction k est $\mathcal{H}_2$-invariante d'après la proposition 2.7.12, elle est finement harmonique dans ω d'après [14], th. 10.2. La proposition découle maintenant de la proposition 2.7.3. appliquée au couple $(\mathcal{V}(v), k)$ et du fait que la fonction finement $\mathcal{H}_1$-hyperharmonique $u \geq 0$ dans U telle que $h = u + \mathcal{V}_0(k)$, qui est evidemment $\mathcal{H}_1$-invariante, est finement $\mathcal{H}_1$-harmonique dans ω puisqu'elle est finie dans ω.

Proposition 2.7.15. Soit $(u, v) \in S_f^+(U)$ un couple pur. Alors, si v est $\mathcal{H}_2$-invariante dans U le couple (u, v) est $\mathcal{H}$-invariant. En particulier si v est finement $\mathcal{H}_2$-harmonique dans U, et si u est finie dans U, alors le couple (u, v) est finement $\mathcal{H}$-harmonique dans U.

Démonstration. Soit (p, q) un $\mathcal{H}$-potentiel fin tel que $(p, q) \prec (u, v)$. On a alors $q \prec v$, et comme v est $\mathcal{H}_2$- invariante et q est un $\mathcal{H}$-potentiel fin, on a $q = 0$, et par suite $(u, v) = (u_1, v) + (p, 0)$, où $(u_1, v) \in S_f^+(U)$. Mais alors on aura $u_1 \geq u$ et donc $p = 0$ et le couple (u, v) est invariant. Le reste de la proposition est évident.

2.8. Problème de Riquier fin.

Soit ω un ouvert fin de X. On note $\mathcal{U}_f^i(\omega)$ l'ensemble des couples finement hyperharmoniques (u, v) dans ω tels qu'il existe un $\mathcal{H}$-poitentiel semi-borné fini $P = (p, q)$ tel que $(u, v) \geq -P$.

Si (f, g) un couple de fonctions sur $\partial_f \omega$, on pose :

$$\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(f,g)} = \inf\{(u, v) \in \mathcal{U}_f^i(\omega) : f - \liminf_{x \in \omega, x \to y} (u, v)(x) \geq (f(y), g(y)), \forall y \in \partial_f(\omega)\}.$$

On pose aussi $\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(f,g)} = (\overline{\mathcal{H}}^{\omega,1}_{(f,g)}, \overline{\mathcal{H}}^{\omega,2}_{(f,g)})$ et $\underline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(f,g)} = -\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(-f,-g)}$.

Il est clair que le couple $\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(f,g)}$ (resp. $\underline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(f,g)}$) est un couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique (resp. finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique) dans ω.

On dit qu'un couple (f,g) de fonctions sur $\partial_f\omega$ est résolutif (pour le problème de Riquier fin) si on a $\underline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(f,g)} = \overline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(f,g)}$ et si ces couples sont finement $\mathcal{H}$-harmoniques dans ω; on notera ces couples par $\mathcal{H}^{\omega}_{(f,g)}$.

Pour tout $j = 1, 2$ et toute fonction f sur $\partial_f\omega$, on note ${}^j\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_f$ (resp.${}^j\underline{\mathcal{H}}^{\omega}_f$) la sur-solution (la sous-solution) du problème de Dirichlet fin dans l'espace harmonique $(X, \mathcal{H}_j)$ pour la donnée frontière f sur $\partial_f\omega$.

Il résulte de la définition et des propriétés des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmoniques que l'on a $\overline{\mathcal{H}}^{1,\omega}_{(f,0)} ={}^1 \overline{\mathcal{H}}^{\omega}_f$ et $\overline{\mathcal{H}}^{2,\omega}_{(f,g)} ={}^2 \overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g$, avec les notations de [14], p. 173, relatives au problème de Dirichlet fin.

Théorème 2.8.1. Soit (f,g) un couple de fonctions sur $\partial_f\omega$. On a alors

$$\overline{\mathcal{H}}^{\omega,1}_{(f,g)} = \int^* f d\mu^{C^\omega}_{.} + \int^* g d\nu^{C^\omega}_{.} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{H}}^{\omega,2}_{(f,g)} = \int^* g d\lambda^{C^\omega}_{.}.$$

Démonstration. Le théorème se démontre comme dans le cas finement harmonique ([14], preuve du th 14.6), en utilisant le théorème 2.3.3.

Corollaire 1. Pour tout couple (f,g) de fonctions sur $\partial_f\omega$, on a

$$\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(f,g)} = ({}^1\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_f + \overline{\mathcal{H}}^{1,\omega}_{(0,g)}, {}^2\,\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g).$$

Corollaire 2. Un couple (f,g) de fonctions sur $\partial_f\omega$ est résolutif si, et seulement si, pour tout $x \in \omega$, f est $\mu^{C^\omega}_x$-integrable et g $\nu^{C^\omega}_x$-intégrable et $\lambda^{C^\omega}_x$-intégrable.

Corollaire 3. Soit $(u,v) \in \mathcal{U}^+_f(U)$ et ω un ouvert fin de X tel que $\tilde{\omega} \subset U$, alors on a

$$\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(u,v)} = (u,v)_{\omega|\omega}.$$

On dit qu'un couple (f, g) sur une partie A de X est borné par un $\mathcal{H}$-potentiel P si on a $|(f, g)| \leq P$ sur A .

Corollaire 4. Soit (f, g) un couple de fonctions boréliennes, borné sur $\partial_f \omega$ par un $\mathcal{H}$-potentiel semi-borné. Alors (f, g) est résolutif.

Théorème 2.8.2. Supposons que l'ouvert fin ω est $\mathcal{H}$-régulier et soit (f, g) un couple de fonctions finement continues sur $\partial_f \omega$, borné par un potentiel semi-borné. On a alors

$$f - \lim_{x \to y, x \in \omega} H^{\omega}_{(f,g)} = (f(y), g(y))$$

pour tout $y \in \partial_f \omega$.

Démonstration. Quitte à ajouter à f et g des constantes, on peut supposer que le couple (f, g) est ≥ 0. D'après le théorème précédent et le théorème 14.6 de [14], on a $\mathcal{H}^{\omega}_{(f,g)} = (\mathcal{H}^{1,\omega}_f + \mathcal{H}^{1,\omega}_{(0,g)}, \mathcal{H}^{2,\omega}_g)$. Or, on sait d'après [12], th. 14.7, que pour tout $y \in \partial_f \omega$, f-$\liminf\limits_{x \in \omega, x \to y} \mathcal{H}^{1,\omega}_f(x) = f(y)$ et f-$\liminf\limits_{x \in \omega, x \to y} \mathcal{H}^{2,\omega}_g(x) = g(y)$, donc on a f-$\liminf\limits_{x \in \omega, x \to y} \mathcal{H}^{\omega}_{(f,g)}(x) \geq (f(y), g(y))$. Soit c une constante vérifiant $c \geq max(\sup\limits_{x \in \partial_f \omega} f(x), \sup\limits_{x \in \partial_f \omega} g(x))$, alors en appliquant ce qui précéde au couple $(c-f, c-g)$, on obtient f-$\limsup\limits_{x \in \omega, x \to y} \mathcal{H}^{\omega}_{(f,g)}(x) \leq (f(y), g(y))$, et le théorème est donc démontré.

Proposition 2.8.3. Si g est une fonction ≥ 0 sur $\partial_f \omega$, alors $\overline{\mathcal{H}}^{1,\omega}_{(0,g)}$ est la fonction hyperharmonique pure d'ordre 2 associée à $\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g$ dans ω.

Démonstration. Si $(u, v) \in \mathcal{U}^i_f(\omega)$ tel que f-$\liminf(u, v) \geq (0, g)$ sur $\partial_f \omega$, alors $v \geq \overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g$, et donc $u \geq \mathcal{V}^{\omega}(\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g)$, d'où l'inégalité $\overline{\mathcal{H}}^{1,\omega}_{(0,g)} \geq \mathcal{V}^{\omega}(\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g)$. D'autre part, on peut trouver une suite décroissante (v_n) de fonctions de $S^{2,+}_f(\omega)$ telle que $\inf v_n =^2 \overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g$. On a alors $\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_{(0,g)} \leq \inf(\mathcal{V}^{\omega}(v_n), v_n) = (\mathcal{V}(\overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g), \overline{\mathcal{H}}^{\omega}_g)$.

Théorème 2.8.4. Soient ω un ouvert fin régulier tel que $\tilde{\omega} \subset U$, et $(u, v) \in \mathcal{U}^+_f(U)$. On a alors $(u, v)_{\omega} = \widehat{(u, v)}^{C^{\omega}}$.

Démonstration. Soit $(s,t) \in \mathcal{U}_f^+(U)$ tel que $(s,t) \geq (u,v)$ sur C^ω; alors on a, d'après le théorème 2.3.3, $s(x) \geq \int^* s d\mu_x^{C^\omega} + \int^* t d\mu_x^{C^\omega}$ et $t(x) \geq \int^* t d\lambda_x^{C^\omega}$ pour tout $x \in \omega$, et donc $s(x) \geq \int^* u d\mu_x^{C^\omega} + \int^* v d\nu_x^{C^\omega}$ et $t(x) \geq \int^* v d\lambda_x^{C^\omega}$ pour tout $x \in \omega$, car les mesures $\mu_x^{C^\omega}$, $\nu_x^{C^\omega}$ et $\lambda_x^{C^\omega}$ sont portées par $\partial_f \omega$; donc $\widehat{(u,v)}^{C^\omega} \geq (u,v)_\omega$. L'inégalitè inverse résulte du corollaire 2 et de la proposition 2.3.13.

2.9. Fonctions finement biharmoniques.

Lemme 2.9.1. Pour tout ouvert fin ω de X tel que $\overline{\omega} \subset X$ et tout $x \in \omega$, on a $\int d\nu_x^{C^\omega} > 0$.

Démonstration. D'après le théorème 2.8.1, le couple $(\int d\nu_{\cdot}^{C^\omega}, 1)$ est finement surharmonique ≥ 0, non identiquement nul dans toute composante finement connexe de ω, donc $\int d\nu_x^{C^\omega} > 0$ pour tout $x \in \omega$.

Considérons maintenant la famille $D(U)$ des fonctions f finement continues sur U telles que la limite

$$Lf(x) = \lim_{\omega \downarrow x} \frac{f(x) - \int f(y) d\epsilon_x^{C^\omega}}{\int d\nu_x^{C^\omega}(y)}$$

et soit finie pour tout $x \in U$ (la fonction $\frac{f(x) - \int f(y) d\epsilon_x^{C^\omega}}{\int d\nu_x^{C^\omega}(y)}$ est bien définie lorsque $\overline{\omega} \subset X$ d'après le lemme précèdent).

Définition 2.9.2. Une fonction f finement continue sur U est dite finement $\mathcal{H}$-biharmonique dans U si $f \in D(U)$ et si Lf est finement $\mathcal{H}_2$-harmonique dans U.

La proposition suivante met en evidence le lien qui existe entre la notion de fonction finement biharmonique au sens de la définition 2.9.2 et la notion de couple finement biharmonique:

Proposition 2.9.3. Soit (u,v) un couple finement $\mathcal{H}$-biharmonique dans un ouvert fin U. Alors $u \in D(U)$ et $Lu = v$.

Démonstration. Soient $x \in U$ et $\epsilon > 0$. Comme v est finement continue, il existe un ouvert fin $\omega_0 \subset U$, $x \in \omega_0$, tel que $|v(x) - v(y)| < \epsilon$ por tout $y \in \omega_0$. Alors, pour tout ouvert fin $\omega \subset \overline{\omega} \subset \omega_0$, $x \in \omega$, on a

$$|u(x) - \int u d\epsilon_x^{C\omega} - v(x) \int d\nu_x^{C\omega}| < \epsilon \int d\nu_x^{C\omega},$$

donc $u \in D(U)$ et $Lu = v$.

Corollaire. Soit (u, v) un couple finement $\mathcal{H}$-biharmonique dans un ouvert fin U. Alors, u est finement biharmonique dans U.

References

[1] N. Boboc, Gh. Bucur, A.Cornea, Order and convexity in Potential theory: H-cones.Lect.Notes in Math. 853, springer-Verlag, 1981.

[2] N. Bobo, Gh.Bucur, Perturbations in excessives structures, Lect. Notes in Math. 1014, Springer-Verlag, (1983) 155-187.

[3] A. Boukricha, Espaces biharmoniques, Lect.Notes in Math. 1096, Springer-Verlag, (1983) 116-148.

[4] N. Bouleau, Espaces biharmoniques et couplage de processus de Markov, J.Math. Pures Appl,58,(1979) 187-204.

[5] M. Brelot, Eléments de la théorie classique du potentiel, C.D.U, 1969.

[6] N. Boboc, C.Constantinescu and A.Cornea,Ann.Inst.Fourier, Grenoble 15, 2 (1965), 37-70.

[7] C. Bensouda, M. El Kadiri, I. Rouchdi, Fonctions finement biharmoniques dans un espace biharmonique. (French) [Finely biharmonic functions in a biharmonic space] Rend. Mat. Appl. (7) 23 (2003), no. 1, 131–161.

[8] G. Choquet, Lectures on Analysis, Vol. 2, Mathematics Lect. Notes Series, Benjamen, Inc. New York, 1969.

[9] C. Constantinescu, A. Cornea, Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer-Verlag Heidelberg, 1972.

[10] C. Dellacherie, P.A. Meyer, Probabilités et potentiel, chap. I à IV, Hermann, Paris, 1975.

[11] C. Dellacherie, P.A. Meyer, Probabilités et Potentiel Chap.XII à XVI, Hermann, Paris, 1987.

[12] M. EL Kadiri, Representation integrale dans le cadre de la théorie des fonctions biharmoniques, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. (1997).

[13] M. EL Kadiri, fonctions finement biharmoniques, Rend. Accad.Sci.XL (5) (2000) 43-61.

[14] B. Fuglede, Finely harmonic functions, Lecture Notes in Math., 289, Springer-Verlag, 1972.

[15] B. Fuglede, Sur la fonction de Green dans un domaine fin, Ann. Inst. Fourrier, 25, (1975) 201-206.

[16] B. Fuglede, Localization in Fine Potentiel Theory and Uniform Approximation by Subharmonic Function, J.Funct.Anal. 49, (1982) 52-72.

[17] B. Fuglede, Integral Representation of Fine Potentiel, Math. Annalen, 262, 1983.

[18] B. Fuglede, Representation integrale des potentiels fins, C.R. Acad. Sci. Paris, 300, Série I, (1985) 129-132.

[19] B. Fuglede, On the Riesz representation of finely superharmonic functions, Lect.Notes in Math, 1344, Springer Verlag, (1987) 199-201.

[20] R.M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann Inst. Fourier, 12, (1962) 415-517.

[21] E.P. Smyrnelis, Axiomatique des fonctions biharmoniques, 1er section, Ann.Inst. fourier,25,1, (1975) 35-97.

[22] E.P. Smyrnelis, Axiomatiques des fonctions biharmoniques, 2e section, Ann Inst. Fourier, tome 26,3, (1976) 1-47.

[23] E.P. Smynelis, sur les fonctions hyperharmoniques d'ordre 2, Lect.Notes in Math. 681, springer Verlag- Heidelberg, 1978.

[24] E.P. Smyrnelis, Support biharmonique et support harmonique associé, Lecture. Notes in Math. 787, Springer Verlag Heidelberg, 1980.

Chapitre III: Approximation des fonctions continues sur les ensembles compacts.

3.1. Introduction

Soit K un compact du plan tel que $S^2 \setminus K$ soit connexe, avec $S^2 = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$.

Pour toute fonction f holomorphe sur un ouvert Ω contenant K il existe une suite de polynômes P_n qui converge uniformément sur K vers f. Ce théorème obtenu par Rung en 1885 a été à l'origine de la théorie de l'approximation par les fonctions harmoniques. Ce résultat fut généralisé plus tard par Walsh [17] en 1929 et après par S.J. Gardiner [14] en 1995.

Cependant le plus grand problème de la théorie de l'approximation par les fonctions harmoniques sur un compact, est la caractérisation des fonctions qui sont uniformément approchables sur un compact par des fonctions harmoniques au voisinage de ce compact. Le premier travail dans ce sens a été obtenu par Debiard et Gaveau [7] en 1975, dont l'enoncé est:

Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction réelle sur K. Alors on a les equivalences

1. Il existe une suite (f_n) de fonctions harmoniques sur des voisinages de K, qui convergent uniformément vers f sur K.

2. f est continue sur K et finement harmonique sur l'intérieur fin de K, noté $K^{'}$.

Ce résultat a été étendu au cadre d'un espace harmonique, vérifiant l'axiome de domination, par B. Fuglede [11]. Ce même auteur a obtenu un résultat analogue pour le cas surharmonique affirmant que, si K est un compact d'un espace harmonique vérifiant l'axiome (D), toute fonction continue sur K et finement surharmonique sur l'intérieur fin de K est uniformément approchable par des fonctions surharmoniques au voisinage de K. Signalons que W. Hensen et Bliedtner ([3], Th. 3.15) ont montré que le théorème de Debiard et Gaveau reste valable dans un espace harmonique sans présence de l'axiome de domination.

Une généralisation au cas d'un ensemble fermé de $\mathbf{R}^n$ a été donnée pour le cas harmonique par P.M. Gauthier et Ladouceur [12], et pour le cas surharmonique par P.M. Gauthier et C. Bensouda [5] .

Dans [6], M. Chadli et M. El Kadiri ont donné une caractérisation des fonctions qui sont uniformément approchables sur un compact K de $\mathbf{R}^n$, par une suite de fonctions biharmoniques au voisinage de K. Rappelons qu'en théorie du potentiel classique une fonction h est dite biharmonique si elle est de classe $\mathcal{C}^4$ et si $\Delta^2 h = 0$, avec Δ l'opérateur de Laplace. Dans ce chapitre nous allons nous placer toujours dans le cas d'un espace biharmonique $(X, \mathcal{H})$ fort au sens de [14], dont les espaces harmoniques $(X, \mathcal{H}_1)$ et $(X, \mathcal{H}_2)$ vérifient nécessairement l'axiome (D), et muni de la même topologie fine. Dans un tel espace une fonction f définie et continue sur un ouvert ordinaire Ω de X est dite bihamonique (ou $\mathcal{H}$-biharmonique) s'il existe une fonction g $\mathcal{H}_2$-harmonique telle que le couple (f, g) soit $\mathcal{H}$-biharmonique. A l'aide du théorème 4 de [11] dû à B. Fuglede nous avons pu prolonger les résultats obtenus dans [6]. Dans la suite nous enonçons les résultats ainsi obtenus (voir [9]). Nous ferrons appel aux notations du chapitre précédent, auquel nous renvoyons pour les définitions de couple finement biharmonique, fonction finement biharmonique, couple pur, etc....

3.2. Couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique et opérateur "L".

Proposition 3.2.1. Soit (u, v) un couple finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique, alors on a $Lu(x) \geq v(x)$, en tout point $x \in U$, tel que $u(x)$ soit finie.

Démonstration. D'après la définition des couples finement $\mathcal{H}$-hyperharmonique on a $u(x) \geq \int u d\mu_x^{C^\omega} + \int v d\nu_x^{C^\omega}$, pour tout ouvert fin ω tel que $x \in \omega$ et $\overline{\omega} \subset U$. D'où $u(x) - \int u d\mu_x^{C^\omega} \geq \int v d\nu_x^{C^\omega}$, et d'après le lemme 2.9.1 du chapitre précédent on a, $\frac{u(x) - \int u d\lambda_x^{C^\omega}}{\int d\nu_x^{C^\omega}} \geq \frac{\int v d\nu_x^{C^\omega}}{\int d\nu_x^{C^\omega}}$ en tout point $x \in U$ où $u(x)$ est finie. La fonction v étant f-s.c.i, il existe pour tout réel α tel que $v(x) > \alpha$, un voisinage fin V_x de x tel que $V_x \subset \overline{V_x} \subset U$ et $v > \alpha$, d'où $\frac{\int v d\nu_x^{C^\omega}}{\int d\nu_x^{C^\omega}} > \alpha$ pour tout ouvert fin ω tel que $x \in \omega$ et $\overline{\omega} \subset V_x$, et par conséquent $Lu(x) \geq v(x)$, et la proposition est démontrée.

Corollaire 3.2.2. Soit (u, v) un couple finement $\mathcal{H}$-hypoharmonique. Alors, on a $Lu(x) \leq v(x)$, en tout point $x \in U$, où $u(x)$ est finie.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $L(-u)(x) = -Lu(x)$ et d'appliquer la proposition précédente au couple $(-u,-v)$ on a le résultat.

Corollaire 3.2.3. Soit (u,v) un couple finement $\mathcal{H}$-biharmonique, alors on a $u \in D(U)$ et $Lu(x) = v(x)$ pour tout $x \in U$.

Corollaire 3.2.4. Soit (h,k) un couple $\mathcal{H}$-biharmonique sur un ouvert ordinaire Ω de X alors, $h \in D(\Omega)$ et $Lh = k$ sur Ω.

Soit U un domaine fin de Ω, d'après le chapitre précédent le noyau borélien $\mathcal{V}_U$ sur U est défini par:

$$\mathcal{V}_U f = \mathcal{V}(\overline{f}) - {}^1\hat{R}^{C^U}_{\mathcal{V}(\overline{f})_{|U}}$$

pour toute fonction borélienne positive sur U, où $\overline{f}$ est le prolongement de f à X, nul dans C^U, et $\mathcal{V}$ le noyau de Bouleau (voir Chap. 1, Th. 1.4.3) Remarquons que si: $U = X$, alors $\mathcal{V}_U = \mathcal{V}$.

Si ω est un ouvert fin de U, on note par $\mathcal{V}^\omega$ le noyau égale à $\mathcal{V}_\delta$ dans chaque composante finement connexe δ de ω. Dans la suite on notera $\mathcal{V}_U$ simplement par $\mathcal{V}$.

Proposition 3.2.5. Soit (u,v) un couple finement $\mathcal{H}$-biharmonique positif sur U. Alors (u,v) est un couple pur si et seulement si $L(\mathcal{V}(v)) = v$ et $\mathcal{V}(Lu) = u$.

Démonstration. Découle de la définition et des propriétés des couples finement $\mathcal{H}$-biharmoniques, et celles des couples purs.

3.3. Approximation des fonctions continues par les fonctions biharmoniques.

Nous commençons par démontrer les lemmes suivants auxquels nous ferrons appel pour établir le théorème qui suit.

Lemme 3.3.1. Soient K un compact de X, et $(V_n)_n$ une suite d'ouverts ordinaires, tels que pour tout n $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$ et $\cap_n V_n = K$, et h une fonction $\mathcal{H}_2$-harmonique strictement positive sur V_1. Alors, la fonction $x \mapsto \int h d\nu_{.}^{C^K}$ est continue sur K.

Démonstration. Soit p un entier $\geq n$. Le couple $(\mathcal{V}_n h, h)$ est $\mathcal{H}$-biharmonique au voisinage de $\overline{V_p}$. On obtient alors, $\mathcal{V}_n h = \int \mathcal{V}_n h d\epsilon_{.}^{C^{V_p}} + \int h d\nu_{.}^{C^{V_p}}$. En faisant tendre $p \to +\infty$, on a

$$\mathcal{V}_n h = \int \mathcal{V}_n h d\epsilon_{.}^{C^K} + \int h d\nu_{.}^{C^K}$$

Les fonctions $\int \mathcal{V}_n h d\epsilon_{.}^{C^K}$ et $\int h d\nu_{.}^{C^K}$ sont s.c.i sur K, et $\mathcal{V}_n h$ est continue sur K, on en déduit alors que $\int h d\nu^{C^K}$ est continue dans K.

Lemme 3.3.2. Soient K un compact de X et (V_n) une suite d'ouverts comme dans le lemme précédent, et g_n une suite de fonctions telle que pour tout n, g_n est $\mathcal{H}_2$-harmonique sur V_n. Alors, la fonction $x \mapsto \int g_n d\nu_x^{C^K}$ est continue sur K.

Démonstration. Soit n un entier fixé, et $m \geq n$. Le couple $(\mathcal{V}_m g_n, g_n)$ est biharmonique dans V_m, et sa réduite sur V_n qu'on note ${}^nR_{(\mathcal{V}_m g_n, g_n)}$ vérifie la relation,

$${}^nR^{C^K}_{(\mathcal{V}_m g_n, g_n)} = \sup_{p \geq m} {}^nR^{C^{V_p}}_{(\mathcal{V}_m g_n, g_n)}.$$

On obtient alors pour tout $x \in K'$,

$$\int g_n d\nu_x^{C^K} = \sup_{p \geq m} \int g_n d\nu_x^{C^{V_p}}.$$

Or la fonction $x \to \int g_n d\nu_x^{C^{V_p}}$ est s.c.i pour tout $x \in K$, d'où la fonction $\int g_n d\nu^{C^K}$ est s.c.i dans K.

D'autre part, selon les hypothèses il existe sur V_1 une fonction $\mathcal{H}_2$-harmonique et strictement positive qu'on note h. La fonction $\frac{g_n}{h}$ est bornée sur V_{n+1} (car elle est continue sur $\overline{V}_{n+1}$), on peut alors supposer que $\frac{g_n}{h} \leq 1$ sur V_{n+1} (quitte à la multiplier par une cte positive)ou encore que $g_n \leq h$. En appliquant le raisonnement précédent à $h - g_n$, on obtient que $\int (h - g_n) d\nu_{.}^{C^K}$ est s.c.i sur K, et d'après le lemme précédent on en déduit que $\int g_n d\nu^{C^K}$ est continue sur K.

Lemme 3.3.3. Soit g une fonction continue sur un compact K et finement $\mathcal{H}_2$-harmonique sur l'intérieur fin K'. Alors, la fonction $x \mapsto \int g d\nu_{.}^{C^{K'}}$ admet une extension continue à K.

Démonstration. Supposons d'abord que $g \geq 0$. D'après B. fuglede ([10], Th. 4) il existe une suite de fonctions g_n harmoniques sur des voisinages V_n de K, qui converge uniformément vers g sur K. D'autre part, toujours selon les hypothèses il existe sur V_1 une fonction h $\mathcal{H}_2$- harmonique strictement positive, donc la suite $\frac{g_n}{h}$ converge uniformément vers $\frac{g}{h}$ sur K. On considérant la mesure $h\nu_{\cdot}^{C^K}$ de masse totale majorée par $\sup_{x \in K} \mathcal{V}_n h(x)$ qui est une quantité finie sur K, et portée par K, on en déduit que la suite de fonctions continues $\int \frac{g_n}{h}\ hd\nu_{\cdot}^{C^K}$ converge uniformément sur K vers une fonction continue, et cette limite vaux $\int \frac{g}{h}\ hd\nu_{\cdot}^{C^{K'}}$ sur K'. Pour le cas général il suffit de considérer $g+c$ avec c une constante positive convenablement choisie telle que $g+c \geq 0$ dans K, et d'appliquer le raisonnement précédent à $g+c$.

Pour la suite notons par $\overline{\mathcal{H}_2(K)}$ l'espace des fonctions uniformément approchable sur K par des fonctions $\mathcal{H}_2$-harmoniques au voisinages de K. Cet espace est identique à l'espace des fonctions finement $\mathcal{H}_2$-harmoniques, à extension continue à K.

Le théorème suivant est le principal résultat du présent travail:

Théorème 3.3.4. Soit f une fonction à valeurs réelles sur un compact K. Alors f est uniformément approchable sur K par une suite (f_n) de fonctions $\mathcal{H}$-biharmoniques au voisinage de K, telles que Lf_n converge uniformément sur K vers une fonction continue g si et seulement si :

1. f est continue sur K.

2. f est finement $\mathcal{H}$-biharmonique sur l'intérieur fin K' de K, et $Lf \in \overline{\mathcal{H}_2(K)}$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite (f_n)vérifiant les conditions de l'enoncé. Le couple (f_n, Lf_n) est finement $\mathcal{H}$-biharmonique sur K', ceci découle simplement de la proposition 2.11 et 2.13. De plus ce couple converge uniformément sur K vers (f,g), il en résulte que ce couple est continu sur K en vue de la convergence uniforme et il est finement $\mathcal{H}$-biharmonique sur K' d'après la définition des couples finement $\mathcal{H}$-biharmoniques [1]. Inversement, supposons que f est continue sur K et finement $\mathcal{H}$-biharmonique sur K', avec $Lf \in \overline{\mathcal{H}_2(K)}$. Notons par g l'extension de Lf à K, et soit V_n et g_n comme dans le lemme précédent. La fonction $f - \int g d\nu_x^{C^{K'}}$ est finement $\mathcal{H}$-harmonique dans K' et admet d'après le lemme précédent une extension continue h sur K. D'après B. Fuglede ([11], Th. 3), il existe une suite (k_n) de fonctions $\mathcal{H}_1$-harmoniques sur des voisinages U_n de K convenablement choisis, telles que k_n converge uniformément vers h sur K. D'autre part la fonction $k_n + \int g_n d\nu_x^{C^{U_n}}$ est $\mathcal{H}$-biharmonique sur U_n et converge uniformément vers f sur K, de plus on a d'après proposition 3.2.5:

$$L(k_n + \int g_n d\nu_x^{C^{U_n}}) = Lk_n + L(\mathcal{V}_n(g_n)) = g_n$$

qui converge uniformément sur K vers Lf.

En théorie des fonctions finement harmoniques, B. Fuglede a montré le résultat suivant:

Théorème 3.3.5. ([12], Th. 4.1) Pour qu'une fonction réelle f, définie sur un ouvert fin U d'un espace harmonique fort satisfaisant l'axiome (D), soit finement harmonique dans U il faut et il suffit qu'il existe, pour tout point $x \in U$, un voisinage fin K compact en topologie initiale et une suite de fonctions f_n, définies et harmoniques dans des voisinages ordinaires respectifs $\omega_n \supset K$, telles que f_n converge uniformément sur K vers f.

Dans la suite nous montrons moyennant le théorème 3.3.4 que les couples finement biharmoniques sur un ouvert fin de X vérifient une propriété analogue à celle du théorème 3.3.5, à savoir :

Corollaire 3.3.6. Un couple de fonctions (f, g) sur U est finement biharmonique si et seulement si, pour tout point $x \in U$, il existe un voisinage fin compact en topologie initiale $K \subset U$ et une suite (f_n, g_n) de couples $\mathcal{H}$-biharmoniques de fonctions définit sur des voisinages des K telles que (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur K vers f et g, respectivement.

References

[1] C. Bensouda, M. El Kadiri, I. Rouchdi, Fonctions finement biharmoniques dans un espace biharmonique. (French) [Finely biharmonic functions in a biharmonic space] Rend. Mat. Appl. (7) 23 (2003), no. 1, 131–161.

[2] C. Bensouda Charaf, El Kadiri Mohamed. Approximation biharmonique sur les compacts. (French) [Biharmonic approximation on compact sets] Proc. A. Razmadze Math.Inst. 133 (2003), 7-19.

[3] J. Bliedtner and W. Hansen, Simplicial cônes in Potential Theory, Inventiones math.29, 83-110 (1975).

[4] N. Bouleau, Espaces biharmoniques et coulage de processus de Markov, J.Math.Pures Appl.58 (1979), 187-204.

[5] C. Bensouda , P.M. Gauthier, Surharmonique approximation on a closed set, J. Contemp. Math. Anal., 29, No. 3, pp. 11-22, 1994.

[6] M. Chadli, M. El Kadiri, Uniforme Approximation of continuous function on compact sets by biharmonic functions comment.Math.Univ.Caralinea, 3 (2003) 427-435.

[7] A. Debiard et Gaveau, Potentiel fin et Algébre de Fonctions Analytiques, I,J.Funct .Anal 16 (1974), 289-304.

[8] M. El Kadiri, Fonctions finement biharmoniques, Rend Accad.Sci XL Mem. Math.Appl (5) 24 (2000) 43-62.

[9] M. El Kadiri et I. Rouchdi, Approximation uniforme des fonctions continues sur les ensembles compacts d'un espace biharmonique. A soumetre pour bien tôt.

[10] B. Fuglede Finely harmonic functions, Lectures Notes in Math. 289,Springer, Berlin Heidelberg-New York, 1972.

[11] B. Fuglede Localization in fine potential theory and uniform Approximation by subharmonic fucntions, J.Funct.Anal. 49, (1982).

[12] B.Fuglede Fonctions harmoniques et fonctions finement harmoniques, Ann.Inst.Fourier, Grenoble 24,4 (1974), 77-91.

[13] P.M. Gauthier, S. Ladouceur, uniform approximation and Fine Potential theory, journal of Approximation vol.72, 2 (1993), 138-140.

[14] S.J. Gardiner, Harmonic Approximation, London Mathématical Society, Lecture Note Series 221, Cambridge University Press, 1995.

[15] E.P. Smyrnelis, Axiomatique des fonctions biharmoniques, 1er section, Ann.Inst.Fourier, 26,1 (1975), 35-98.

[16] E.P. Smyrnelis, Axiomatique des fonctions biharmoniques, 2eme section Ann.Inst.Fourier, 26,3 (1976), 1-47.

[17] J.L. Walsh, The approximation of harmonic functions by harmonic polynomials and by harmonic rational functions, Bull. Amer. Math. Soc.(2) 35 (1929), 499-544.

Chapitre IV: Annexe .

Dans la suite nous allons donner la signification par ordre croissant de toutes les notions figurant dans l'introduction de la thèse marquées par un chiffre dessus.

(1) : La force gravitationnelle est la force qu'exerce mutuellement deux corps de masses M_1 et M_2 et dont l'expression du module est donnée par la formule suivante: $\frac{G.M_1M_2}{r^2}$ où $G = 6,672.10^{-11}m^3.Kg^{-1}.s^{-2}$ désigne la constante gravitationnelle .

(2) : On appelle région de masse libre toute région dans laquelle la masse n'est soumise à aucune force extérieure.

(3) : Une fonction h vérifie l'équation de Laplace, si $\Delta h = 0$ avec Δ désigne l'opérateur de Laplace classique. La classe de fonctions vérifiant cette équation sont dites "fonctions harmoniques".

(4) : La formule intégrale de Poisson dans la boule $B(0,R)$ est donnée par:

$$\frac{1}{\alpha_n R}\int_{\partial B}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}u(y)d\sigma(y).$$

où α_n désigne l'aire de la boule de rayon 1.

(5) : Le problème de Dirichlet consiste à chercher, pour une boule ouverte B, une fonction continue sur $B \cup \partial B$, harmonique sur B, dont la restriction à ∂B soit une fonction continue f donnée à l'avance. Notons de plus que si la donnée frontière est positive il en est de même pour la solution de ce problème.

(6) : La fonction de Green ou bien noyau de Green de la boule $B(x_0,R)$ relative au pôle y est la fonction :

$$G_y^B = h_y - I(h_y).$$

où $I(h_y)$ est l'intégrale de Poisson dans B de la restriction de h_y à ∂B.

(7) : Le principe du minimum affirme que toute fonction harmonique dans un ouvert ω de $\mathbf{R}^n$ ne peut avoir un maximum ou un minimum en un point de ω sans être constante au voisinage.

(8) : Les inégalités de Harnak on peut les énoncées sous plusieures formes dont l'une est: " Pour tout compact K inclus dans un ouvert ω de $\mathbf{R}^n$, il existe $k > 0$ dépendant seulement de K et de ω telle que, pour toute fonction harmonique $u > 0$ dans ω, on ait les inégalités : $\frac{1}{k} \leq \frac{u(x)}{u(y)} \leq k$".

(9) : La propriété de convergence des fonctions harmoniques s'énonce comme suit :" Pour toute famille (u_i) filtrante croissante de fonctions harmoniques dans un ouvert ω, si $\sup u_i$ est finie en un point, alors $\sup u_i$ est finie et harmonique dans ω".

(10) : On dit qu'un ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est effilé en un point $x_0 \notin E$ si x_0 n'est pas adhérent à E ou s'il existe une fonction surharmonique v au voisinage de E telle que: $v(x_0) < \liminf_{x \to x_0, x \in E} v(x)$.

(11) : Une fonction s définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est dite bi-surharmonique si elle est localement intégrable et si $\Delta^2 s \geq 0$ au sens des distributions.